



# THÈSE DE DOCTORAT DE L'ÉCOLE CENTRALE PARIS

Spécialité

**MÉCANIQUE**

Présentée par

**Josselyn TOUZEAU**

pour obtenir le grade de :

**DOCTEUR DE L'ÉCOLE CENTRALE PARIS**

## **Approche numérique multiéchelle / multimodèle de la dégradation des matériaux composites**

soutenue le 30 octobre 2012 devant le jury composé de :

- Rapporteurs :* Christian Rey, Professeur à l'ENS de Cachan  
Nicolas Carrere, Enseignant-Chercheur à l'ENSTA Bretagne
- Examineurs :* Michel Potier-Ferry, Professeur à l'Université de Metz  
David Marsal, Concepteur turbine chez Herakles (groupe Safran)
- Directeur de thèse :* Hachmi Ben Dhia, Professeur à l'ECP
- Encadrant Onera :* Vincent Chiaruttini, Ingénieur-Chercheur à l'Onera  
Frédéric Feyel, Maître de Recherche à l'Onera



*À mon grand père, Yves.*





---

# Remerciements

Après trois années de thèse et quelques mois additionnels, il est l'heure d'achever ces travaux par l'éternelle et symbolique page des remerciements. Il est évident que ces quelques lignes ne sont pas suffisantes pour exprimer ma gratitude cependant, elles me permettent de citer les nombreuses personnes qui m'ont aidé et accompagné durant cette thèse et leur signifier ma considération.

Je tiens, tout d'abord, à remercier Shigehisa Naka pour m'avoir accepté dans le Département de Matériaux et Structures Métalliques de l'Onera, au sein de l'unité Mécanique Numérique.

Ensuite, je souhaite remercier mes deux rapporteurs : Christian Rey, de l'ENS Cachan, ainsi que Nicolas Carrere, de l'Ensta Bretagne, qui ont méticuleusement étudié ce manuscrit avant de me donner la possibilité de soutenir ces travaux. J'en profite pour remercier Christian et Pierre Gosselet de nous avoir accompagné lors de discussions, au cours de rendez-vous ou de congrès, concernant les approches de décomposition de domaine ; mais aussi Nicolas pour m'avoir apporté des idées de simulations numériques portant sur les problématiques composites et m'avoir toujours soutenu avec une dose d'humour.

Pour avoir présidé le jury de ma soutenance, j'exprime ma gratitude à Michel Potier-Ferry, de l'Université de Metz, pour avoir apporté un point de vue universitaire en complément de la vision industrielle amenée par David Marsal, que je remercie également pour avoir accepté d'examiner ces travaux.

Je poursuis ces remerciements avec Hachmi BenDhia, directeur du Laboratoire de Mécanique des Sols, Structures et MATériaux de l'École Centrale de Paris. Après avoir accepté de diriger cette thèse, il a apporté son expertise de la méthode Arlequin et des travaux relatifs mais, il a également guidé ces travaux pour qu'ils présentent une innovation et une originalité par rapport aux travaux antérieurs. Je souhaite aussi le remercier pour le temps important qu'il a pris afin d'effectuer les nombreuses relectures qui ont façonné ce manuscrit.

Ensuite, je veux remercier Vincent Chiaruttini qui m'a accueilli et qui a très bien rempli son rôle d'encadrant par sa présence et sa capacité d'enseignement mais qui m'a grandement aidé pour la mise en œuvre des développements dans le code ZéBuLoN. Je remercie également Frédéric Feyel, responsable de l'équipe MNU, qui nous a chaperonné en nous apportant sa vision d'ensemble par ses connaissances riches et étendues.

De la même manière, je souhaite remercier l'ensemble des personnes travaillant au bâtiment E4, où siège une partie du département DMSM ; que ce soit les permanents : JD, Johann, Franck, Serge, Arjen, Parcale, Jean-Louis, ... mais aussi les doctorants : Domi-

nique, Bénédicte, Guylaine, Noémie... ; et bien sûr les gens du labo : Didier, Vincent, Robin et JB ainsi que tous ceux qui se reconnaîtront. De façon identique, je tiens à remercier les gens du DMSC, avec qui j'ai beaucoup échangé : J-F, Fred, Cédric, François-Henry, F-X et surtout Thomas Vandellos. Enfin, je veux donner mon encouragement à l'association EChO, dont j'ai été membre avec mes confrères Jean-Michel, Matthieu et Thomas.

Je désire aussi manifester quelques égards aux gens que j'ai pu croisé durant cette période : Aurélien Vattré, Lionel Marcin, Alexandre Bérard (EDF), Ryan Szypowski (Dpt mathematics of USCD), l'aéroport de Salt Lake City (où est sûrement affiché un de mes poster de présentation), Sophie Garabedian (Secrétaire du DMSM), Nathalie Langlet (Secrétaire MSSMaT), Géraldine Carbonel et Catherine Lhopital (secrétaires de l'école doctorale de l'ECP).

Enfin, je tiens à remercier ma famille et ma belle-famille pour avoir participé, malgré eux, à cette expérience et notamment Justine et Ingrid pour avoir donné de leur temps pour éplucher les différentes versions du manuscrit. Pour finir, un grand merci à ma chère conjointe, Audrey, qui a activement participé à la relecture de ce manuscrit et qui a, durant toute cette période, su m'instruire sur des domaines sociaux, bien différents de la mécanique scientifique.

Et pour toi, lecteur, qui, je l'espère, trouveras ce que tu cherches dans ce manuscrit.

---

# Résumé

## APPROCHE NUMÉRIQUE MULTIÉCHELLE / MULTIMODÈLE DE LA DÉGRADATION DES MATÉRIAUX COMPOSITES

Nos travaux concernent la mise en œuvre d'une méthode multiéchelle pour faciliter la simulation numérique de structures complexes, appliquée à la modélisation de composants aéronautiques (notamment pour les pièces tournantes de turboréacteur et des structures composites stratifiées).

Ces développements sont basés autour de la méthode Arlequin qui permet d'enrichir des modélisations numériques, à l'aide de patches, autour de zones d'intérêt où des phénomènes complexes se produisent. Cette méthode est mise en œuvre dans un cadre général permettant la superposition de maillages incompatibles au sein du code de calcul Z-set/Zébulon, en utilisant une formulation optimale des opérateurs de couplage. La précision et la robustesse de cette approche ont été évaluées sur différents problèmes numériques.

Afin d'accroître les performances de la méthode Arlequin, un solveur spécifique basé sur les techniques de décomposition de domaine a été développé pour bénéficier des capacités de calcul offertes par les machines à architectures parallèles. Ces performances ont été évaluées sur différents cas tests académiques et quasi-industriels.

Enfin, ces développements ont été appliqué à la simulation de problèmes de structures composites stratifiées.

**MOTS-CLEFS :** MÉTHODE ARLEQUIN, MULTIÉCHELLE, DÉCOMPOSITION DE DOMAINE, MAILLAGES INCOMPATIBLES, STRUCTURE STRATIFIÉE, ENDOMMAGEMENT COMPOSITE.



---

# Abstract

## MULTISCALE / MULTIMODEL COMPUTATIONAL APPROACH TO THE DEGRADATION OF COMPOSITE MATERIALS

Our work concerns the implementation of a method for convenient multiscale numerical simulation of complex structures, applied to the modeling of aircraft components (including rotating parts made of jet engine from laminate composite structures).

These developments are based on the Arlequin method which allows to enrich numerical modeling, using patches around areas of interest where complex phenomena occur. This method is implemented in a general framework in order to link made of incompatible meshes in the Z-set/Zébulon finite element code, using an optimal formulation of the coupling operators. The accuracy and robustness of this approach were evaluated on various numerical problems.

To increase the performance of the Arlequin method, a specific solver based on domain decomposition techniques has been developed to take advantage of computing capabilities offered by parallel machine architectures. Its performance has been evaluated on different numerical assessments from academic to industrial tests.

Finally, these developments have been applied to the simulation of problems made of laminate composite structures.

KEY-WORDS : ARLEQUIN METHOD, MULTISCALE, DOMAIN DECOMPOSITION, NON CONFORM MESHES, LAMINATE STRUCTURE, DAMAGE COMPOSITE.



---

# Table des matières

<b>Remerciements</b>	<b>iii</b>
<b>Résumé</b>	<b>v</b>
<b>Abstract</b>	<b>vii</b>
<b>Introduction</b>	<b>1</b>
<b>Notations</b>	<b>3</b>
<b>1 Problématique et État de l'Art</b>	<b>5</b>
1.1 Problématique . . . . .	6
1.1.1 Représentation des principaux phénomènes de dégradation . . . . .	6
1.1.2 Les structures multi-niveaux . . . . .	10
1.1.3 Les détails géométriques . . . . .	11
1.1.4 Présentation des problèmes types . . . . .	12
1.2 État de l'art des méthodes multiéchelles . . . . .	13
1.2.1 Méthodes d'enrichissement . . . . .	13
1.2.2 Méthodes de sous-domaines . . . . .	16
1.2.3 Méthodes de superposition . . . . .	24
1.3 Bilan . . . . .	27
<b>2 La méthode Arlequin</b>	
<b>Principes et Mise en œuvre</b>	<b>29</b>
2.1 Introduction . . . . .	30
2.2 Le problème d'élasticité classique . . . . .	30
2.3 La méthode Arlequin . . . . .	32
2.3.1 Superposition . . . . .	32
2.3.2 Partition énergétique . . . . .	32

2.3.3	Liaison entre les domaines . . . . .	33
2.3.4	Formulation continue du problème Arlequin . . . . .	34
2.4	Discrétisation et mise en œuvre numérique . . . . .	34
2.4.1	Discrétisation de la formulation continue Arlequin . . . . .	35
2.4.2	Stratégie d'évaluation des différents termes Arlequin . . . . .	37
2.4.3	Écriture du problème sur le maillage intermédiaire . . . . .	45
2.4.4	Aspects techniques liés à l'opérateur de couplage énergétique . . . .	47
2.4.5	Stratégie de modélisation . . . . .	51
2.4.6	Détails et recommandations . . . . .	53
2.4.7	Résolution directe . . . . .	54
2.5	Validation des performances . . . . .	55
2.5.1	Cas d'une plaque percée en deux dimensions . . . . .	55
2.5.2	Cas d'une simulation multipatch en trois dimensions. . . . .	61
2.6	Bilan . . . . .	63
<b>3</b>	<b>Décomposition et</b>	
	<b>Parallélisation de la méthode Arlequin</b>	<b>65</b>
3.1	Introduction . . . . .	66
3.2	Décomposition de domaine sans recouvrement . . . . .	66
3.2.1	Approche primale . . . . .	69
3.2.2	Approche duale . . . . .	70
3.2.3	Préconditionneurs liés aux approches . . . . .	72
3.3	Résolution de systèmes mixtes Arlequin . . . . .	74
3.3.1	Problème aux interfaces Arlequin . . . . .	74
3.3.2	Étude des préconditionneurs associés . . . . .	76
3.3.3	Résolution parallèle de façon itérative . . . . .	78
3.4	Validation des performances . . . . .	80
3.4.1	Cas d'une plaque percée tridimensionnelle . . . . .	80
3.4.2	Cas multipatch de plaque percée tridimensionnelle . . . . .	86
3.4.3	Étude d'une aube multiperforée avec 31 patches . . . . .	88
3.5	Bilan . . . . .	93
<b>4</b>	<b>Application</b>	
	<b>aux matériaux composites</b>	<b>95</b>
4.1	Introduction . . . . .	96
4.2	Plaque stratifiée percée . . . . .	97
4.2.1	Modélisation d'une structure composite stratifiée. . . . .	97



4.2.2	Première modélisation Arlequin d'une plaque stratifiée percée. . . .	98
4.2.3	Premiers tests numériques pour une plaque stratifiée percée . . . .	99
4.3	Deuxième modélisation Arlequin d'une plaque stratifiée percée (modèle sub- strat homogénéisé). . . . .	103
4.3.1	Homogénéisation macroscopique . . . . .	104
4.3.2	Test de la deuxième modélisation. . . . .	106
4.4	Plaque stratifiée avec endommagement. . . . .	109
4.4.1	Loi d'endommagement . . . . .	110
4.4.2	Simulation d'un couplage avec une loi endommageable . . . . .	112
4.5	Essai de délaminage . . . . .	117
4.5.1	Loi d'interface . . . . .	117
4.5.2	Simulation d'un essai de DCB en deux dimensions . . . . .	119
4.6	Bilan . . . . .	123
<b>Conclusion</b>		<b>125</b>
<b>Bibliographie</b>		<b>127</b>
<b>A Projection optimal d'un champ entre deux maillages</b>		<b>139</b>
<b>B Algorithme de création d'une règle d'intégration entre deux maillages</b>		<b>141</b>



---

# Liste des figures

1.1	Vue en coupe d'un stratifié ayant des interfaces reliant des plis avec des orientations différentes. . . . .	8
1.2	Microdéfauts dans la matrice ou à l'interface fibres/matrice. . . . .	8
1.3	Apparition de microfissures dans la matrice. . . . .	8
1.4	Création de fissures transverses lorsque les microfissures atteignent les interfaces. . . . .	9
1.5	Apparition du délaminage sous l'effet de contraintes interlaminaires. . . . .	9
1.6	Les différentes étapes de la formation du délaminage. . . . .	9
1.7	Les différentes échelles du stratifié : macro-méso-micro. . . . .	10
1.8	Exemples de détails géométriques . . . . .	12
1.9	Prise en compte d'une fissure sur un maillage par la méthode X-Fem . . . . .	15
1.10	Problème de Schwarz avec deux domaines superposés. . . . .	16
1.11	Décomposition de la structure en sous-structures et interfaces . . . . .	20
1.12	Une itération de la méthode LATIN . . . . .	22
1.13	Les différents modèles : Global, Local. . . . .	23
1.14	Schéma d'illustration de la méthode s-version . . . . .	25
1.15	Représentation des deux niveaux de modélisation de la méthode HDPM. . . . .	26
2.1	Problème d'élasticité classique. . . . .	31
2.2	Problème multimodèle constitué de deux domaines. . . . .	32
2.3	Les différents types de fonctions de pondération . . . . .	33
2.4	Division du modèle local. . . . .	34
2.5	Représentation éléments finis de trois domaines. . . . .	35
2.6	Règle d'intégration adaptée pour l'opérateur de couplage du substrat avec discrétisations incompatibles entre modèles. . . . .	37
2.7	Carte des coefficients de pondération et règle d'intégration pour l'évaluation des termes de rigidité. . . . .	38
2.8	Génération du maillage d'intersection. . . . .	41

2.9	Définition d'un domaine $D^p$ d'intersection entre un élément $D_0^e$ et $D_c^e$ en 2D.	42
2.10	Construction d'une boîte englobant un élément. . . . .	43
2.11	Arbre de répartition des boîtes. . . . .	43
2.12	Schéma explicatif de la modélisation d'un couplage avec plusieurs patchs sur un seul niveau. . . . .	46
2.13	Schéma explicatif de la modélisation d'un emboîtement de patchs. . . . .	47
2.14	Division du domaine intermédiaire avec couronnes. . . . .	48
2.15	Intégration des couronnes intérieure et extérieure sur le maillage intermédiaire.	49
2.16	Modèle substrat et modèle libre du patch donnés initialement. . . . .	52
2.17	Construction de la zone de collage selon la géométrie. . . . .	53
2.18	Modèle patch et maillage intermédiaire construits. . . . .	53
2.19	Schéma de modélisation d'une plaque percée. . . . .	55
2.20	Modélisation Arlequin du problème de plaque percée en deux dimensions. .	56
2.21	Comparaison de la réponse de la contrainte $\sigma_{yy}$ entre le cas de référence et le patch Arlequin. . . . .	56
2.22	Patch avec augmentation du nombre d'éléments dans la zone de collage. . .	57
2.23	Courbe de déplacement selon l'axe $y$ des nœuds situés sur la ligne trame_ $y$ des modèles substrat et patch. . . . .	59
2.24	Schéma de sollicitations des modes rigides d'une plaque percée. . . . .	60
2.25	Tests de configurations concernant l'opérateur énergétique . . . . .	60
2.26	Schéma de la poutre L en 3 dimensions. . . . .	61
2.27	Modélisation d'une poutre avec 4 patchs dont 2 patchs situés sur un patch. .	62
2.28	Représentation de la contrainte de VonMises sur les trois patchs raffinés. . .	62
3.1	Décomposition en deux sous-domaines. . . . .	67
3.2	Principe de la décomposition de domaine dans le cadre de la méthode Arlequin.	78
3.3	Schéma de modélisation d'une plaque percée en trois dimensions. . . . .	80
3.4	Comparaison des différents types de couplage sur la convergence d'un calcul parallèle. . . . .	81
3.5	Augmentation de la taille de la zone de collage : 1, 2, 4 et 8 couches. . . . .	82
3.6	Influence de la taille de la zone de collage sur le nombre d'itérations (pondération continue avec résolution itérative non préconditionnée). . . . .	83
3.7	Influence de la taille de la zone de collage sur le nombre d'itérations (pondération constante de 0,5 avec résolution itérative non préconditionnée). . .	83
3.8	Influence de la taille de la zone de collage sur le nombre d'itérations (pondération continue avec résolution itérative préconditionnée). . . . .	84
3.9	Influence de la taille de la zone de collage sur le nombre d'itérations (pondération constante de 0,5 avec résolution itérative préconditionnée). . . . .	84

3.10	Influence de l'incompatibilité dans l'épaisseur (pondération linéaire avec résolution itérative préconditionnée). . . . .	85
3.11	Influence de l'incompatibilité dans l'épaisseur (pondération constante de 0,5 avec résolution itérative préconditionnée). . . . .	85
3.12	Schéma de modélisation d'une plaque avec cinq perçages en trois dimensions. . . . .	86
3.13	Iso-contraintes de Von-Mises sur un cas de traction-flexion 3D avec 5 patches percés (amplifiées 30 fois). . . . .	87
3.14	Iso-contraintes de Von-Mises sur une modélisation référence d'un cas de traction-flexion en 3D (amplifiées 30 fois). . . . .	87
3.15	Influence des différents opérateurs de couplage dans le cas d'une simulation multipatch. . . . .	88
3.16	Schéma d'un turboréacteur d'avion. . . . .	89
3.17	Modèle d'aube étudiée. . . . .	89
3.18	Schéma d'explication du refroidissement d'une aube en fonctionnement. . . . .	90
3.19	Schéma de modélisation d'une aube simulacre avec 31 perçages d'aération sur le bord d'attaque. . . . .	91
3.20	Critère de Von-Mises en contraintes sur le modèle substrat. . . . .	91
3.21	Critère de Von-Mises en contraintes sur les différents modèles patches. . . . .	92
4.1	Représentation de l'empilement stratifié. . . . .	97
4.2	Modélisation d'une plaque stratifiée percée par la méthode Arlequin. . . . .	98
4.3	Schéma de la simulation de la plaque stratifiée percée par la méthode Arlequin. . . . .	99
4.4	Maillages du modèle substrat et du modèle patch pour un stratifié à 4plis. . . . .	100
4.5	Tableau des propriétés du T300 / 914. . . . .	100
4.6	Courbes de convergence de résolutions itératives pour 4 types d'empilements. . . . .	101
4.7	Figures de champs de contraintes autour du perçage pour la modélisation monomodèle. . . . .	102
4.8	Figures de champs de contraintes autour du perçage pour la modélisation Arlequin. . . . .	103
4.9	Modélisations des deux modèles de la plaque stratifiée percée avec homogénéisation par la méthode Arlequin . . . . .	104
4.10	Maillages intermédiaires pour une modélisation Arlequin avec modèle substrat possédant un comportement homogénéisé. . . . .	106
4.11	Maillages du modèle substrat et du patch pour un stratifié à 4 plis avec un comportement homogénéisé pour le substrat. . . . .	107
4.12	Figures de champs de contraintes autour du perçage pour la modélisation Arlequin avec le modèle substrat possédant un comportement homogénéisé dans l'épaisseur. . . . .	108

4.13	Figures de champs de contraintes autour du perçage pour la modélisation Arlequin avec le modèle substrat possédant un comportement homogénéisé dans l'épaisseur et un modèle intermédiaire n'ayant qu'un seul élément dans l'épaisseur. . . . .	109
4.14	Définitions des paramètres d'endommagement du pli ( $\rho, \mu$ ) et de l'épaisseur $h$ pour déterminer le tenseur de rigidité équivalente $C$ du pli. . . . .	112
4.15	Schéma de modélisation d'une plaque stratifiée avec deux perçages. . . . .	113
4.16	Tableau des propriétés du T700 / M21. . . . .	113
4.17	Tableau des propriétés du T700 / M21 endommageable. . . . .	114
4.18	Évolution du champ de la variable d'endommagement de la matrice au bord d'un perçage. . . . .	115
4.19	Évolution du champ de la variable d'endommagement de la matrice sur l'ensemble du patch. . . . .	115
4.20	Figures de comparaison avec une simulation éléments finis monomodèle et un essai expérimental [79]. . . . .	116
4.21	Évolution du champ de la variable de rupture des fibres sur le patch. . . . .	116
4.22	Description modèle de zone cohésive. . . . .	117
4.23	Division et modèles de loi adoucissante. . . . .	118
4.24	Schéma de modélisation d'un modèle substrat de l'essai DCB en 2D. . . . .	119
4.25	Tableau des propriétés du XAS / 914C. . . . .	119
4.26	Schéma de modélisation d'un modèle patch de l'essai DCB en 2D. . . . .	120
4.27	Tableau des propriétés de l'interface. . . . .	120
4.28	Maillages des deux modèles pour l'essai DCB en 2D. . . . .	120
4.29	Champ de déplacement sur le modèle patch avec propagation du délaminage	121
4.30	Représentation des éléments rompus lors de la propagation du délaminage .	121
4.31	Courbe de la force $F_y$ en fonction du déplacement $U_y$ au point A. . . . .	122
A.1	Transfert de champ entre deux domaines aux discrétisations différentes. . .	139
B.1	Définition des sous-éléments $D_z^e$ d'intersection entre des élément $D_1^e$ et $D_2^e$ en 2D. . . . .	142
B.2	Évolution des temps CPU pour un calcul des intersections 2D. . . . .	144
B.3	Évolution des temps CPU pour un calcul des intersections 3D. . . . .	144

---

# Introduction

Le travail de thèse que nous présentons dans ce manuscrit a été réalisé dans le cadre du projet RupScen, financé par la FRAE (Fondation de Recherche pour l'Aéronautique et l'Espace), au sein de l'unité de mécanique numérique du département mécanique des structures métalliques à l'Onera. Le but de ce projet est de développer des outils numériques permettant de simuler les scénarios d'endommagement et de rupture des structures composites utilisées dans le secteur aéronautique.

Pour réduire la consommation des avions, les objectifs de réduction de masse des composants mécaniques utilisés sont tels qu'il est de plus en plus fait appel à l'utilisation de nouveaux matériaux composites. En effet, par les possibilités d'optimisation qu'offre ce type de matériaux (choix de la répartition et l'orientation des couches, pour les stratifiées, par exemple), il est possible de remplir efficacement les objectifs de résistance et de durabilité requis avec une densité massique inférieure aux matériaux métalliques traditionnels. Cependant, l'utilisation des composites dans un domaine aussi réglementé que l'aéronautique, avec des exigences de sécurité extrêmement élevées, pose de nombreuses difficultés pour les industriels aussi bien au niveau de la caractérisation des constituants que de l'évaluation de la durée de vie des composants particulièrement sollicités, puisque le retour d'expérience est encore relativement faible. De plus, au sein d'une démarche de conception, les simulations numériques, qui requièrent des modélisations fiables particulièrement complexes sont elles-mêmes problématiques : le caractère intrinsèquement multiéchelle des structures composites influe particulièrement sur l'étude de leurs phénomènes et requiert des descriptions très fines, rendant la simulation quasi-impossible pour des structures de grandes dimensions.

En pratique, la modélisation d'une structure composite et de ces phénomènes d'endommagement, s'effectue sur des échelles différentes. Autant le modèle qui permet de décrire la structure est souvent à une échelle macroscopique ( $\approx$  de l'ordre du mètre), autant certains phénomènes (fissure, délaminage, etc...) nécessitent une description à une échelle microscopique ( $\approx$  de l'ordre du millimètre voire du micromètre). La complexité du modèle tient alors à l'existence d'interactions mutuelles entre les phénomènes agissant à chacun des niveaux, qui doivent être pris en compte de la manière la plus efficace possible pour ne pas pénaliser le coût de calcul qui devient vite rédhibitoire.

En réponse à la nécessité de faire cohabiter des descriptions différentes dans un problème mécanique avec des coûts contrôlés, une multitude d'approches multiéchelles ont été développées durant les dernières décennies. C'est dans cette dynamique de recherche que s'inscrivent les travaux présentés dans ce document ; travaux dans lesquels nous avons choisi le cadre de modélisation Arlequin, proposé par Ben Bhia en 1998 [12]. Elle présente, d'un point de vue industriel, l'avantage de permettre une utilisation simple et flexible pour un ingénieur, car elle propose d'insérer un modèle supplémentaire, adapté à l'étude d'un phénomène local, dont la représentation est nécessaire, sans avoir à modifier un modèle global

plus grossier de la structure. De plus, sa mise en œuvre peut s'effectuer à l'aide d'un module additionnel, extérieur au code de simulation, avec une application directement sur le modèle à enrichir tout en profitant des méthodes de résolution relatives à ce code.

Dans ces travaux de thèse, plusieurs développements autour de la méthode Arlequin et leurs mises en œuvre sont effectués sous la contrainte de disposer d'une approche caractérisée par une simplicité d'utilisation, une grande robustesse, de bonnes performances en temps de calcul. En effet, c'est véritablement dans l'objectif que ces travaux soient repris comme possibilité de modélisation concrète, au niveau d'un bureau d'étude par exemple, que nos développements ont été menés. À l'usage, des utilisateurs non-spécialistes des méthodes numériques doivent pouvoir réaliser des simulations sur des structures complexes, en conservant le plus possible leurs outils de calcul privilégiés.

Ce manuscrit est organisé en quatre principaux chapitres.

Le premier chapitre expose les problématiques relatives aux structures aéronautiques. Ces structures, soumises à d'importantes contraintes, peuvent nécessiter dans certaines zones, des niveaux de représentations à des échelles fines pour reproduire des phénomènes localisés. Un panel de ces phénomènes est brièvement présenté. Afin de faciliter la simulation de ce type de problème, il est possible d'employer des méthodes multiéchelles. Ces approches permettent, dans un même problème, de coupler différentes représentations pour être en mesure de capter les phénomènes complexes et, en même temps, de modéliser des problèmes de grandes dimensions.

Le second chapitre présente et détaille les caractéristiques de la méthode multiéchelle Arlequin sur laquelle est basée l'ensemble de nos travaux. On y expose tout particulièrement la façon non intrusive dont nous l'avons mise en œuvre pour coupler des modèles possédant des maillages incompatibles dans le code de calcul Zset/ZéBuLoN, employé à l'Onera. La mise en œuvre est ensuite évaluée et validée, en résolution séquentielle, sur différents cas tests.

Le troisième chapitre détaille les rapprochements effectués avec les méthodes de décomposition de domaine afin de résoudre, à l'aide de calculateurs à architecture parallèle, les problèmes Arlequin discrets. On évalue ensuite les capacités d'une résolution parallèle pour calculer des problèmes se rapprochant des structures quasi-industrielles.

Le quatrième et dernier chapitre traite de l'utilisation de la méthode Arlequin pour modéliser et simuler les phénomènes d'endommagement des structures composites stratifiées. Ces cas tests sont définis à partir d'outils et de lois développées et employées au DMSC, à l'Onera, afin de caractériser ou valider des problèmes industriels sur structures composites.



---

# Notations

## Calcul tensoriel et différentiel

- $\overline{a}$  : tenseur du premier ordre
- $\underline{a}$  : tenseur du deuxième ordre
- $\underline{\underline{a}}$  : tenseur du quatrième ordre
- $I_d$  : tenseur unité du deuxième ordre
- $\overline{\underline{\underline{0}}}$  : tenseur nul du premier ordre
- $\underline{\underline{0}}$  : tenseur nul du deuxième ordre
- $\underline{\underline{a}}^T$  : transposé d'un tenseur du second ordre, d'une matrice ou d'un vecteur

## Topologie, ensembles et espaces fonctionnels

- $\Omega$  : ouvert de  $\mathbb{R}^n$
- $\partial\Omega$  : frontière de  $\Omega$
- $L^2(\Omega) : \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{R} / x \text{ mesurable sur } \Omega \text{ et } \int_{\Omega} \|f(x)\|_{\mathbb{R}}^2 dx < \infty\}$
- $H^1(\Omega)$  : espace de Sobolev d'ordre 1

## Grandeurs mécaniques

- $\overline{u}$  : champs de déplacement
- $\overline{\underline{\underline{\varepsilon}}}$  : tenseur des déformations linéarisé
- $f^d$  : densité massique d'effort
- $\underline{\underline{a}}$  : tenseur d'élasticité
- $\underline{\underline{\sigma}}$  : tenseur des contraintes

## Caractéristiques des matériaux

- $E$  : module d'Young
- $\nu$  : coefficient de Poisson



---

# Problématique et État de l'Art

Ce chapitre présente le contexte de nos travaux, entre problématiques et besoins, puis une exploration détaillée de différentes méthodes existantes développées pour résoudre ce type de problème.

Dans la première partie de ce chapitre, certains phénomènes physiques et/ou nécessités numériques rencontrés lors de simulations complexes, liés au secteur de la conception aéronautique, sont exposés et permettent d'établir la problématique de nos travaux. Celle-ci s'axe principalement sur la simulation virtuelle de structures nécessitant une description particulière dans une région définie. En effet, due au besoin toujours plus essentiel que les modèles numériques reproduisent soigneusement le comportement réel de la structure, une analyse de différents problèmes représentatifs est réalisée pour mieux comprendre ce besoin d'un changement de représentation. Cette analyse permet de situer le cadre pour lequel ces travaux sont développés ainsi que les exigences propres à la mise en œuvre.

Dans la seconde partie de ce chapitre, une revue des méthodes numériques, développées pour répondre à ce type de problématiques, est exposée. Ces approches sont principalement basées sur la combinaison de deux échelles de représentation. La première permet de décrire l'ensemble de la structure et d'imposer des chargements réels. La deuxième échelle permet de reproduire fidèlement certains phénomènes singuliers ou géométries complexes, qui nécessitent une description très fine. C'est du mélange de ces deux échelles et de l'impossibilité de résolution de problèmes trop complexes que sont apparues les méthodes multiéchelles. Afin de comprendre et de situer la démarche choisie dans nos travaux, un inventaire non exhaustif de ces approches est proposé.

## 1.1 Problématique

Dans de nombreux domaines de l'industrie de pointe tels que les secteurs de l'aéronautique, de l'automobile ou encore ferroviaire, la simulation numérique est devenue indispensable. En effet, il est primordial pour les entreprises, attachées aux secteurs de la conception, d'être innovantes pour faire face à une concurrence croissante et d'augmenter leur expertise pour rester compétitives. En particulier, dans l'aéronautique, la conception et l'élaboration des structures exigent des certifications strictes avant une exploitation en vol. Ces certifications, indispensables, requièrent de longues et coûteuses campagnes d'essais expérimentales que les acteurs majeurs du secteur veulent restreindre par le biais de simulations numériques. En plus d'avoir un impact sur la cadence de production, l'expérimentation virtuelle, sur ordinateur, rend possible la conception de structures innovantes répondant de façon pertinente à des cahiers des charges, toujours plus contraignants.

Il n'est cependant pas aisé de réaliser la simulation de telles structures toujours plus complexes. En effet, lorsque la géométrie et le comportement de ces structures sont modélisés, la question de la validité de ces modèles, liée à la mesure de l'erreur de représentation entre la modélisation et la structure réelle, se pose. L'appréciation de cette erreur est laissée à l'expertise du modélisateur, ainsi qu'aux exigences et pré-requis du cahier des charges. Une fois cette première approximation effectuée pour passer du réel au modèle, il est réalisée une seconde approximation permettant d'effectuer des simulations, en pratiquant une discrétisation du modèle. Cette deuxième étape génère aussi son lot d'erreurs, lié au type de discrétisations utilisées pour représenter le modèle de la structure. De plus, le modèle numérique résultant est en général très lourd.

Fort heureusement, la représentation d'une structure réelle n'a pas toujours besoin d'être fine partout. En effet, l'objectif d'une simulation virtuelle est souvent axé sur la prise en compte et la description de phénomènes particuliers dans des zones limitées de la structure. Le degré de finesse de la représentation se révèle ainsi différent selon les diverses zones de la structure. Dans les structures aéronautiques, on peut relever trois types de zones où des phénomènes particuliers nécessitent une description adaptée :

1. les régions où se développent des phénomènes de dégradation de type endommagement ou rupture.
2. les zones où la structure est fortement hiérarchisée.
3. les zones comportant des détails géométriques localisés.

Ces différents cas de figures sont présents dans de nombreuses structures. Afin de mieux cerner le besoin en moyens numériques, nous allons les illustrer par des exemples.

### 1.1.1 Représentation des principaux phénomènes de dégradation

Lorsqu'une structure subit des chargements, son comportement peut être décrit à partir de lois matériaux et des formulations mathématiques. Dans le domaine de la conception aéronautique, une part importante des structures est métallique avec un comportement ductile. Pour un tel comportement, la première phase de déformation est en régime élastique, gardant le comportement du matériau réversible et, en l'absence de chargement, permet un

retour de la structure à sa forme initiale sans dégradation. Lorsque le chargement croît, le comportement du matériau devient plastique, générant une déformation permanente. Avec la poursuite de l'augmentation du chargement, certaines zones de la structure sont endommagées. Cet endommagement se localise et dégénère en fissure. Dans le cas de matériaux fragiles, la rupture s'effectue de façon plus brutale (avec une phase plastique réduite).

Dans la suite, on détaille un phénomène de détérioration représentatif de ceux rencontrés sur les structures aéronautiques. Ce phénomène, dérivé du mécanisme de fissuration, est particulièrement présent dans les matériaux composites, c'est le délaminage. Le paragraphe suivant n'a pas pour objectif d'étudier les détails de ce phénomène mais plutôt de l'illustrer afin de comprendre les aspects mécaniques qu'il provoque ainsi que de présenter la façon dont il peut être modélisé.

### Le délaminage

Le délaminage est le terme qualifiant la décohésion entre deux couches matériaux collées ayant des comportements en rigidité différents ; pouvant ainsi créer des concentrations de contraintes d'ouverture au niveau de l'interface. Ce phénomène de rupture est principalement associé aux modes de ruine des matériaux composites, en particulier les structures stratifiées [11].

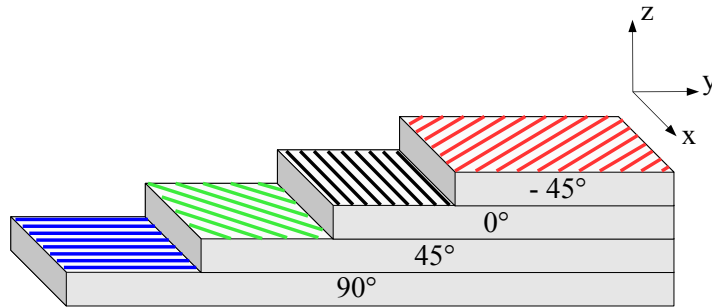
Il existe quatre sortes de phénomènes de dégradations principaux dans les matériaux composites :

- les microfissures de la matrice,
- les ruptures de fibres,
- la décohésion fibre/matrice,
- le délaminage.

Les deux premiers phénomènes peuvent être attachés à celui de la fissuration alors que les deux derniers sont apparentés à des phénomènes de décollement entre deux phases ayant des comportements différents. Si l'attention est plus particulièrement centrée sur le délaminage, c'est parce qu'il s'agit d'un phénomène apparaissant sous de faibles sollicitations à proximité de détails structurels (rivetage par exemple). Pour modéliser correctement ce type de défaut, il est nécessaire de considérer la mécanique de la rupture, en tenant compte de l'anisotropie des matériaux. La constitution des différents plis, pour un stratifié (cf figure 1.1), est assujettie à de nombreux critères tels que la séquence d'empilement, l'orientation des plis, le nombre de plis, le chargement, la taille ainsi que la forme.

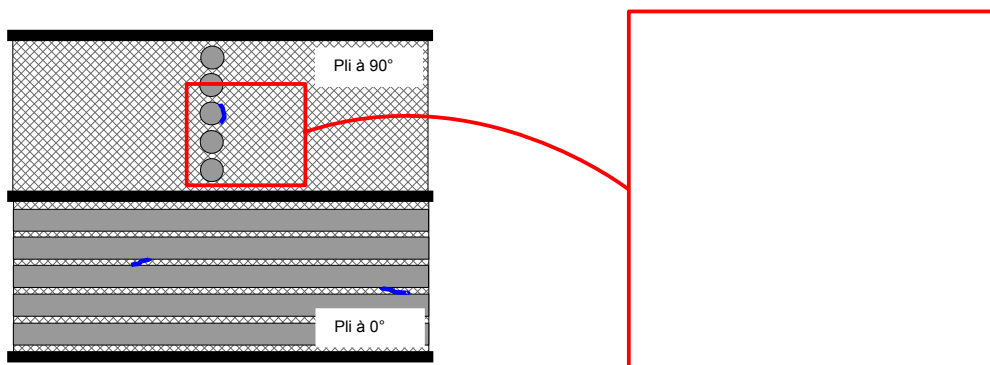
De la même manière que pour l'amorçage d'une fissure, les différents phénomènes de ruine d'un stratifié peuvent être découpés suivant plusieurs étapes :

- la dégradation est initiée par l'existence de microdéfauts dans la matrice ou à l'interface de collage entre la matrice et les fibres (cf figure 1.2),
- l'évolution du chargement influe, dans une seconde étape, sur ces microdéfauts qui croissent et finissent par coalescer. Ce changement de régime se marque par l'apparition de microfissures dans la matrice et l'augmentation des micro-décohésions de type fibre/matrice (cf figure 1.3),
- dans une troisième étape, ces différents phénomènes de ruine font apparaître des fissurations transverses qui altèrent les plis (cf figure 1.4),

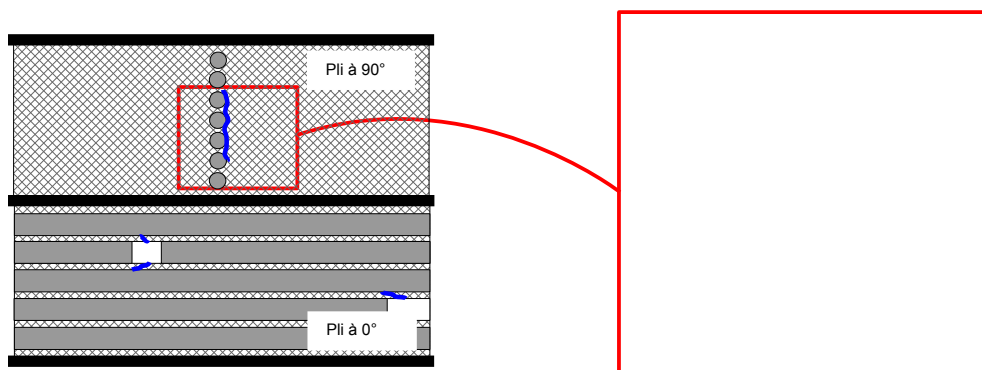


**Figure 1.1** — Vue en coupe d'un stratifié ayant des interfaces reliant des plis avec des orientations différentes.

- dans la quatrième étape, lorsque les fissurations transverses atteignent les interfaces, et sous l'effet de contraintes interlaminaires, apparaît le délaminage qui se propage dans l'interface entre les plis (cf figure 1.5).

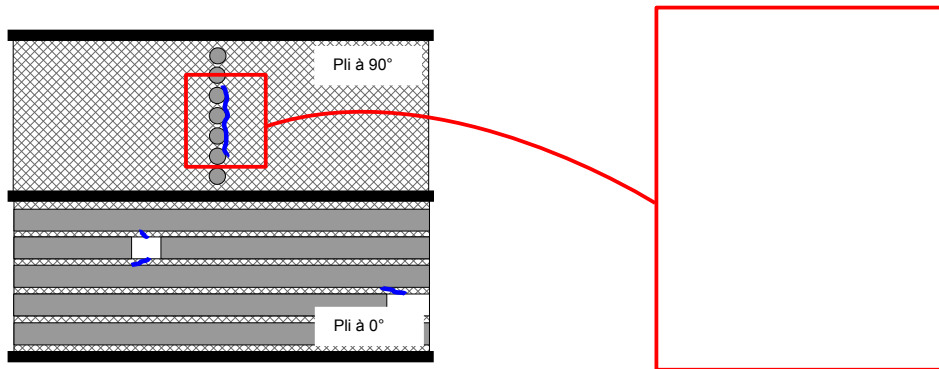


**Figure 1.2** — Microdéfauts dans la matrice ou à l'interface fibres/matrice.

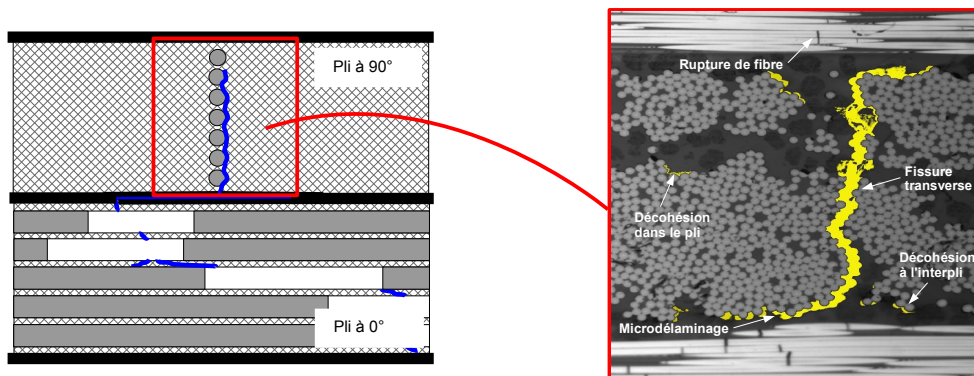


**Figure 1.3** — Apparition de microfissures dans la matrice.

Quand le phénomène de délaminage est plus spécifiquement observé (cf figure 1.6), le constat est que sa croissance est provoquée par les microfissures, initialement présentes, qui s'agrandissent sous l'effet de chargements interlaminaires. Les microdéfauts, présents dans les structures composites, sont initialement produits par diverses origines telles que

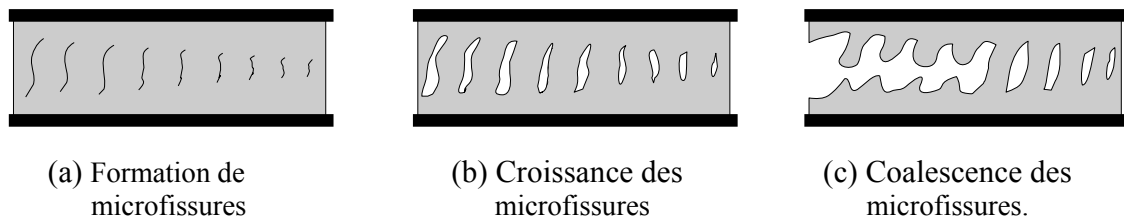


**Figure 1.4** — Création de fissures transverses lorsque les microfissures atteignent les interfaces.



**Figure 1.5** — Apparition du délaminage sous l'effet de contraintes interlaminaires.

des défauts de fabrication, des chocs, des différences de températures ou des chargements résiduels. Il est observé que le décollement complet, dû à la coalescence de ces microfissures, est alors accompagné par la formation de pointes de déchirement sur les surfaces de chaque pli au niveau de l'interface (cf figure 1.6).



**Figure 1.6** — Les différentes étapes de la formation du délaminage.

Pour cet exemple commun de phénomène de dégradation, une description très précise s'avère nécessaire pour étudier son amorçage ainsi que sa propagation. De plus, son apparition ainsi que sa croissance surgissent et évoluent à de très petites échelles.

### 1.1.2 Les structures multi-niveaux

Un modèle est censé représenter au mieux la structure réelle à simuler. Cependant, le matériau de cette structure réelle est souvent complexe et désordonné. En effet, un matériau peut contenir, de façon localisée, des imperfections, des inclusions, etc... La structure peut aussi avoir une constitution hiérarchique, de sorte que la tenue du matériau est différente selon l'échelle d'étude prise en compte. Pour ces matériaux, le comportement de la structure n'est pas forcément équivalent à celui de l'élément représentatif. De plus, le comportement macroscopique peut être directement déduit des propriétés microscopiques à partir d'une approche "*déductive*".

Dans la section suivante, on détaille le composite stratifié qui permet de représenter la notion de structures multi-niveaux.

#### Un stratifié

La famille des structures stratifiées est sans doute la plus commune au sein des matériaux composites. Ce type de structure est formé à partir de différents constituants. Plus spécifiquement, le stratifié est composé de couches successives de plis (cf figure 1.1). C'est la séquence d'empilement des plis qui génère les caractéristiques du comportement global de la structure. Chaque pli est un assemblage entre une phase solide qui assure la rigidité (fils, mat, tissu, etc...) et une phase matricielle qui réalise la cohésion de ces renforts (résine, etc..). Pris indépendamment, le comportement d'un pli est souvent unidirectionnel, en privilégiant la rigidité dans une direction. Trois échelles peuvent être distinguées dans un stratifié (cf figure 1.7) :

- l'échelle du stratifié, dite macroscopique, où le comportement est lié à l'empilement ainsi que l'épaisseur et l'orientation de chaque pli. L'épaisseur complète d'un stratifié étant en général supérieure au millimètre.
- l'échelle du pli, dite mésoscopique, où le comportement est inhérent au couple fibre/matrice. Généralement chaque pli possède une direction de résistance privilégiée. L'épaisseur d'un pli pouvant atteindre quelques centaines de micromètres.
- enfin, l'échelle de la fibre dite microscopique. Le comportement est alors lié principalement aux caractéristiques de la fibre. Le diamètre d'une fibre allant de 5 à 15 micromètres.

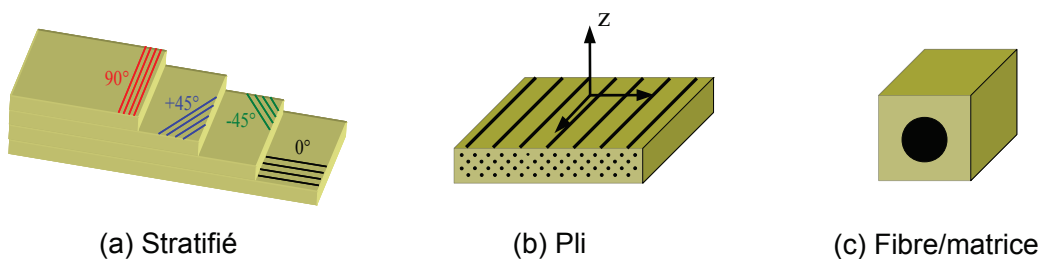


Figure 1.7 — Les différentes échelles du stratifié : macro-méso-micro.



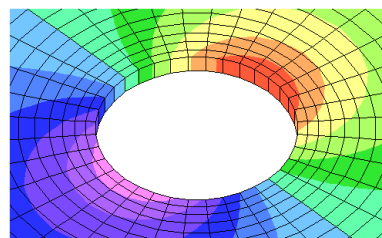
Pour cette structure empilée, le comportement global est fortement dépendant de ses constituants. Le pli est construit à partir de fibres unidirectionnelles et d'une matrice isotrope, peu résistante. Son comportement est orthotrope. La séquence de superposition de ces plis rend le comportement du stratifié anisotrope dans le plan des fibres. Le comportement mésoscopique est souvent obtenu à partir du comportement microscopique par la loi des mélanges, alors que le comportement macroscopique est couplé au comportement mésoscopique par homogénéisation.

C'est la séquence d'empilement des couches qui détermine la résistance du stratifié. Cette séquence est réalisée de sorte à répondre, de façon optimale, au cahier des charges. Deux catégories de structures stratifiées sont réalisées communément. Les stratifiés symétriques sont obtenus par empilement symétrique des plis. Ils offrent une bonne planéité au démoulage. Les stratifiés hybrides, dont les nuances constituant les plis sont diverses (carbone, kevlar, métaux, etc...), permettent d'avoir des performances supérieures grâce à l'utilisation optimale des propriétés de chaque matériau à chaque couche.

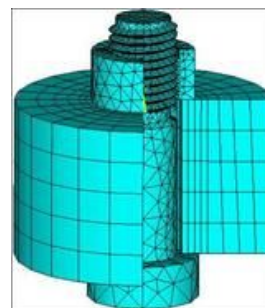
### 1.1.3 Les détails géométriques

Les pièces issues de la conception des aéronefs sont souvent géométriquement très complexes. De plus, les évolutions technologiques actuelles ont plutôt tendance à les complexifier davantage. En effet, l'optimisation de ces structures, qui vise à les alléger et à ce qu'elles répondent toujours plus efficacement au cahier des charges, peut passer par une phase de modification de la géométrie. Cela produit des structures avec des géométries particulièrement difficiles à simuler. De plus, il peut apparaître d'autres difficultés de représentation géométrique lorsque ces structures sont issues d'assemblages où les phénomènes de contact requièrent des descriptions particulièrement fines.

La conséquence majeure pour ces géométries, comportant des détails complexes, est que leurs modélisations sont difficiles (cf figures 1.8(c)). En effet, les zones où apparaissent les complexités géométriques sont souvent les lieux de fortes concentrations de contraintes, responsables de l'endommagement. Ces zones font ainsi l'objet d'une attention particulière, avec une description détaillée.



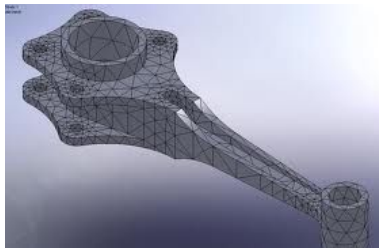
(a) Simulation de perçage



(b) Simulation de boulonnage

On peut classer les complexités géométriques en trois catégories :

- celles issues d'enlèvements de matière tels que perçage (cf figure 1.8(a)), rainure, etc...



(c) Simulation d'une géométrie complexe

(d) Simulation de contact

**Figure 1.8** — Exemples de détails géométriques

- celles liées à l'ajout de matière tels que boulon (cf figure 1.8(b)), vis, rivet, etc...
- et celles isochores tels que courbure, angle, contact (cf figure 1.8(d)), inclusion, etc...

La description du modèle doit donc être très fine dans certaines zones, tout en étant plus grossière dans le reste de la structure qui ne nécessite pas de raffinement particulier. Le degré de finesse, exigé pour la description, est lié à la complexité de ces détails géométriques.

Les éléments donnés ci-dessus dévoilent une partie de la grande complexité des structures aérospatiales notamment lorsque l'on s'y intéresse à un stade de leur vie où elles commencent à subir des détériorations. Les travaux présentés dans ce document visent à proposer une stratégie numérique pouvant aider la conception et l'analyse de ces structures en des temps ingénieurs. Mais, l'ensemble des problèmes présentés, étant trop vaste, nous limitons nos développements aux problèmes types qui suivent.

#### 1.1.4 Présentation des problèmes types

Notre objectif est d'étudier numériquement le comportement macroscopique d'une structure pour laquelle le modèle macroscopique est supposé être valable partout sauf en certaines zones localisées de cette structure. Par rapport à ce que nous avons décrit ci-dessus, nous pouvons imaginer que le comportement macro du matériau ne soit pas connu localement ou qu'un des modèles comporte des défauts (raidisseur, trou, fissure, délaminage, etc) ou des singularités locales. Par ailleurs, nous supposons que nous disposons d'un modèle micro valable dans ces zones localisées (mais aussi valable sur le reste de la structure). Essayons de proposer une stratégie visant à correctement appréhender ce type de problème.

Une première manière de procéder consiste à user de la *"force brute"*, i.e., utiliser le modèle micro partout. Mais, ce procédé produit des simulations avec un trop grand nombre d'inconnues. Les résolutions étant liées aux capacités de traitement et de mémoire des machines de calcul, les coûts engendrés demeurent trop élevés pour des utilisations ingénieurs malgré l'augmentation continue des progrès technologiques informatiques.

Une seconde manière repose sur l'homogénéisation du modèle micro afin de pouvoir résoudre des structures de plus grandes dimensions. L'unification des paramètres et nuances matériaux produit alors un comportement macroscopique homogénéisé. Cependant l'homogénéisation de ces caractéristiques matérielles donne une représentation insuffisante dans les zones de géométrie plus complexes ou aux niveaux des bords libres.

Une autre manière est d'utiliser deux modèles possédant des descriptions différentes, l'objectif étant de séparer les deux échelles afin d'adapter la représentation de chacun aux besoins. C'est l'optimisation des transmissions entre ces modèles qui génère l'efficacité de ce procédé. Pour les méthodes les plus simples, la simulation du modèle le plus fin s'effectue à l'aide de conditions aux limites tirées d'un calcul du modèle grossier. Ce dernier n'est pas influencé par un retour correctif issu du modèle fin. Bien que cette technique simple apporte une première approximation, il est parfois nécessaire d'établir une réelle communication à double sens entre les deux échelles afin d'éviter de grossières erreurs. Ce constat a motivé le développement de méthodes multiéchelles.

## 1.2 État de l'art des méthodes multiéchelles

Dans cette partie, on expose une sélection de méthodes multiéchelles peuvent s'inscrire dans notre problématique.

Dans le cas le plus simple d'application de problèmes multiéchelles, deux niveaux se distinguent : le niveau global, qui définit le comportement macroscopique de la structure, et le niveau local, qui apporte une information plus riche car il expose un comportement se déroulant à une échelle inférieure, éventuellement microscopique. Ces deux échelles sont reliées par le biais de relations d'échanges.

Il existe une quantité notable de méthodes multiéchelles dans la littérature. Dans ce chapitre, nous ne retenons que des approches pouvant être utilisées pour la résolution de tout ou partie de la problématique abordée dans ces travaux de thèse. Nous les classons en trois catégories : les méthodes d'enrichissement, les méthodes de sous-domaines et les méthodes de superpositions.

La première catégorie de méthodes n'est pas à proprement parlé "multiéchelle" puisqu'elles n'ont pas un caractère d'échelle aussi clairement défini cependant, de part leur présence importante dans les codes de calcul industriels et leur capacité à introduire une représentation supplémentaire, une présentation détaillée s'avère intéressante.

### 1.2.1 Méthodes d'enrichissement

Dans cette catégorie de méthodes, nous pouvons citer celles adaptatives et celles utilisant l'idée de Trefftz [117, 69] tout en localisant l'enrichissement.

#### Approches adaptatives

Dans le cadre de la méthode des éléments finis, on distingue trois familles classiques de méthodes adaptatives : la *r-méthode*, la *h-méthode* [7] et la *p-méthode* [5]. Des combinaisons de ces approches sont possibles [3, 49, 50, 70, 98]. La *r-méthode* procède par (re)localisation des nœuds d'un maillage fixé pour diminuer les erreurs. Pour le même objectif, la *h-méthode* procède par diminution de la taille (h) des éléments d'un maillage et ce par subdivision de ces éléments. La *p-méthode* augmente le degré polynomial des fonctions de base éléments finis. La procédure du raffinement est fondée sur un estimateur d'erreur a posteriori permettant

d'indiquer, de manière itérative, les zones à raffiner. On distingue dans la littérature classique trois types d'estimateurs a posteriori : l'estimateur de Babüska et al [4], le ZZ-estimateur [128] et l'estimateur en relation de comportement de P. Ladevèze [71]. Nous renvoyons à [39, 40], par exemple, pour plus de détails.

Les méthodes adaptatives sont opérationnelles. Mais elles peuvent, pour des problèmes complexes, générer des systèmes numériques de très grandes tailles et restent soumise à la performance des remailleurs automatiques.

### Méthode de Partition de l'Unité (PUM)

À l'instar des méthodes de Treftz, les méthodes de Partition de l'Unité (PUM) [86] enrichissent les espaces d'approximations standards par le rajout de champs analytiques, représentant le comportement de la solution recherchée pour un problème donné. Leur caractéristique principale est de localiser ces enrichissements par l'usage d'une partition de l'unité, définie sur le domaine dans lequel le problème à résoudre est posé. Une partition de l'unité, très utilisée en pratique, est celle définie par les éléments finis.

Plus précisément, si nous supposons que  $\mathcal{V}_n$  est un espace d'approximation éléments finis et si nous notons  $\overrightarrow{u}^h$  la solution approchée, nous avons :

$$\overrightarrow{u}^h(\overrightarrow{x}) = \sum_{I \in \mathcal{N}} N_I(\overrightarrow{x}) \overrightarrow{U}_I \quad (1.1)$$

où  $\underline{N}$  est la fonction associée au nœud. Comme la somme des fonctions de forme  $N_I$  constitue une partition de l'unité :

$$\sum_{I \in \mathcal{N}} N_I(\overrightarrow{x}) = 1 \quad \forall \overrightarrow{x} \in \Omega \quad (1.2)$$

Il est possible de compléter le déplacement  $\overrightarrow{u}(\overrightarrow{x})$  par une fonction d'enrichissement  $\Phi(\overrightarrow{x})$  sous la forme suivante :

$$\overrightarrow{u}_e^h(\overrightarrow{x}) = \overrightarrow{u}^h(\overrightarrow{x}) + \sum_{J \in \mathcal{N}^e} N_J(\overrightarrow{x}) \overrightarrow{U}_J^e \Phi(\overrightarrow{x}) \quad (1.3)$$

où  $\mathcal{N}^e$  est un sous-ensemble de  $\mathcal{N}$  où sont placés des degrés de liberté d'enrichissement  $\overrightarrow{U}_J^e$ .

De ce concept, basé sur la partition de l'unité, deux approches ont été dérivées. Il s'agit de la méthode G-FEM (comme Generalized Finite Element Method) et de la méthode X-FEM (comme Extended Finite Element Method).

La méthode G-FEM, développée par Strouboulis et al. [114], repose sur un enrichissement utilisant la PUM de l'espace éléments finis standard par des fonctions spéciales, dites "*fonctions chapeaux*". Ainsi, des champs connus sous forme de modes ou de solutions éléments finis locales (répertoriées dans des "*handbooks*" [65]) sont rajoutés à cet espace pour approcher les solutions de problèmes de structures comportant, par exemple, des détails géométriques ou des défauts de type inclusions, trous ou fissures.

Dans cette approche, les fonctions spéciales peuvent être dépendantes des fonctions de base éléments finis standards. Cette dépendance est surmontée par des stratégies de factorisation partielle ou de régularisation. Un autre problème apparaît au niveau de l'intégration numérique des travaux virtuels impliquant les fonctions chapeaux. Pour limiter les erreurs liées à cette intégration numérique, des schémas adaptatifs sont utilisés. Mais ces schémas peuvent être coûteux pour des structures tridimensionnelles avec maillages libres.

La méthode, X-FEM développée, par Moës, Dolbow et Belytschko [11, 87] est une seconde variante de la PUM. Elle se distingue par la très grande flexibilité avec laquelle elle permet d'introduire une fissure (discontinuité forte de la matière) ou une interface matériaux (discontinuité faible) dans une approximation éléments finis standard ne tenant pas compte de ces discontinuités. Dans le cas de la fissure, par exemple, si l'approximation éléments finis classique est donnée par (1.1), le champ enrichi par la X-FEM est défini comme suit :

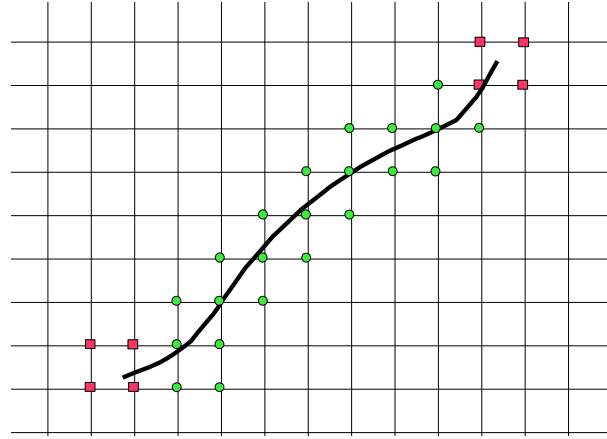


Figure 1.9 — Prise en compte d'une fissure sur un maillage par la méthode X-Fem

$$\vec{u}^h(\vec{x}) = \underbrace{\sum_{I \in \mathcal{N}} N_I(\vec{x}) \vec{U}_I}_I + \underbrace{H(\vec{x}) \sum_{J \in \mathcal{J}_{cut}} N_J(\vec{x}) \vec{A}_J}_{II} + \underbrace{\sum_{K=1}^4 F_K(\vec{x}) \left( \sum_{L \in \mathcal{L}_{sing}} N_L(\vec{x}) \vec{B}_{KL} \right)}_{III} \quad (1.4)$$

où trois termes peuvent être distingués. Le premier terme correspond au champ de déplacement éléments finis classique. Le second représente le saut de déplacement qui a lieu au niveau des lèvres de la fissure. Dans ce terme,  $\mathcal{J}_{cut}$  est le sous-ensemble de nœuds qui sont enrichis pour tenir compte de la discontinuité (nœuds ronds sur la figure (cf 1.9)) sans contenir ceux en pointe de fissure. Les degrés de libertés additionnels correspondants sont notés  $\vec{A}_J$  et  $H(\vec{x})$  est la fonction discontinue d'Heaviside :

$$H(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \geq 0 \\ -1 & \text{si } x < 0 \end{cases} \quad (1.5)$$

Le dernier terme représente l'enrichissement tenant compte des modes singuliers de Westergaard [44] en pointes de la fissure. Dans ce terme,  $\mathcal{L}_{sing}$  est les sous-ensembles de nœuds

qui sont enrichis (nœuds carrés sur la figure (cf 1.9)),  $B_{KL}$  sont les degrés de liberté additionnels et  $F_k(\vec{x})$  les fonctions de Westergaard.

Le grand avantage de l'approche XFEM est qu'elle ne nécessite pas de remaillage lors de l'étude d'une fissure ou de sa propagation. Observons que l'intégration numérique sur des éléments traversés par la fissure demande un sous-découpage approprié.

Cette méthode est largement utilisée pour l'approximation numérique de problèmes de structures [33, 34, 116, 112, 115, 10]. Elle a également été utilisée dans le cadre d'approches multi-grilles [99, 100]. Elle a été aussi utilisée dans le cadre Arlequin [17, 67], pour des problèmes où les modes dans les zones critiques ne sont pas connus analytiquement.

## 1.2.2 Méthodes de sous-domaines

Les méthodes de décomposition de domaine proposent de diviser une structure en sous-structures et relations d'interfaces. Ces approches sont généralement employées pour résoudre des problèmes discrets à très grand nombre de degrés de liberté à l'aide d'architectures parallèles.

Afin d'illustrer ces méthodes de sous-domaines, le fonctionnement de trois approches est détaillé dans les sections suivantes.

### Méthodes de Schwarz

Les méthodes de Schwarz ont leurs racines dans la stratégie itérative initiée par Schwarz [109, 110]. Ces approches sont de nature décomposition de domaine avec recouvrement (elles peuvent également être sans recouvrement cf [81]). La résolution d'un problème mécanique complet par ces méthodes s'effectue de manière itérative par des résolutions successives sur chaque sous-domaine, avec des conditions aux limites tirées des solutions précédentes. Afin d'expliquer les différents algorithmes qui découlent des travaux de Schwarz (avec recouvrement), on considère un problème posé sur un domaine  $\Omega$ , partitionné en deux sous-domaines  $\Omega_1$  et  $\Omega_2$  se recouvrant (cf figure 1.10). On note  $\Gamma_1$  et  $\Gamma_2$  les parties de frontières de  $\Omega_1$  et  $\Omega_2$  délimitant la zone de recouvrement.

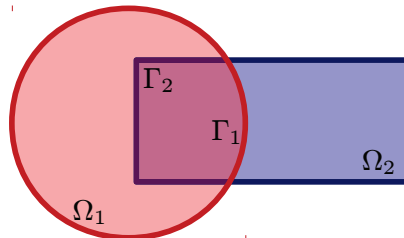


Figure 1.10 — Problème de Schwarz avec deux domaines superposés.

Sur le domaine global, considérons le problème linéaire d'équations aux dérivées partielles suivant :

$$L u = f \quad \text{sur } \Omega \quad (1.6)$$

$$u = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega \quad (1.7)$$

Avec  $L$  un opérateur linéaire défini sur le domaine  $\Omega$ . La méthode de Schwarz consiste à utiliser un processus itératif dans lequel, à chaque itération, le problème (1.6,1.7) est décomposé sur les deux sous-domaines  $\Omega_1$  et  $\Omega_2$ , moyennant des conditions aux limites sur  $\Gamma_1$  et  $\Gamma_2$  qui sont ajustées au cours des itérations. On distingue deux approches principales, l'une est qualifiée de multiplicative et l'autre d'additive.

L'approche multiplicative, dite **Multiplicative Schwarz Method**, permet de résoudre le problème à l'itération  $n$  avec comme condition initiale de connaître  $u_2^{n-1}$ . On calcule  $u_1^n$  puis  $u_2^n$  en résolvant :

$$\begin{aligned} L u_1^n &= f \quad \text{sur } \Omega_1 & L u_2^n &= f \quad \text{sur } \Omega_2 \\ u_1^n &= 0 \quad \text{sur } \partial\Omega_1 \setminus \Gamma_1 & u_2^n &= 0 \quad \text{sur } \partial\Omega_2 \setminus \Gamma_2 \\ u_1^n &= u_2^{n-1} \quad \text{sur } \Gamma_1 & u_2^n &= u_1^n \quad \text{sur } \Gamma_2 \end{aligned} \quad (1.8)$$

Le système linéaire du problème (1.6) est discrétisé sous la forme  $\underline{\underline{A}} \vec{u} = \vec{b}$ . Le principe des méthodes de Schwarz est de corriger la solution globale. On note  $\vec{u}^n$  à la  $n$ -ième itération du vecteur solution  $\vec{u}$  et  $\vec{r}^n = \vec{b} - \underline{\underline{A}} \vec{u}^n$  le résidu correspondant. La correction du déplacement  $\vec{u}^n$  par le résidu  $\vec{r}^n$  est réalisée par projection du résidu sur chaque sous-domaine. Lorsque la méthode est dite multiplicative, cette projection est faite successivement sur les sous-domaines à l'aide d'opérateurs de restriction  $\underline{\underline{R}}_i$  ( $\Omega$  vers  $\Omega_i$ ) et de prolongation  $\underline{\underline{R}}_i^T$ . La matrice linéaire de chaque sous-domaine peut être définie telle que :

$$\underline{\underline{A}}_{\Omega_i} = \underline{\underline{R}}_i \underline{\underline{A}} \underline{\underline{R}}_i^T \quad (1.9)$$

Pour la méthode multiplicative, le calcul d'une itération pour obtenir  $\vec{u}^{n+1}$  est déterminé en deux étapes. À chaque demi itération,  $\vec{u}^{n+\frac{1}{2}} - \vec{u}^n$  et  $\vec{u}^{n+1} - \vec{u}^{n+\frac{1}{2}}$  ne sont que les projections de l'erreur sur  $\Omega_1$  puis  $\Omega_2$ . Il est possible d'écrire les deux étapes d'une itération de l'algorithme tel que :

$$\text{MSM :} \quad \vec{u}^{n+1} = \vec{u}^{n+\frac{1}{2}} + [\underline{\underline{R}}_2^T \underline{\underline{A}}_{\Omega_2}^{-1} \underline{\underline{R}}_2](\vec{b} - \underline{\underline{A}} \vec{u}^{n+\frac{1}{2}}) \quad (1.10)$$

$$\text{avec } \vec{u}^{n+\frac{1}{2}} = \vec{u}^n + [\underline{\underline{R}}_1^T \underline{\underline{A}}_{\Omega_1}^{-1} \underline{\underline{R}}_1](\vec{b} - \underline{\underline{A}} \vec{u}^n) \quad (1.11)$$

$$(1.12)$$

Cet algorithme itératif possède un taux de convergence qui est inverse au nombre de sous-domaines et lié à la taille de la zone de recouvrement. Néanmoins, malgré sa convergence rapide, cette approche présente l'inconvénient d'avoir une mauvaise parallélisation car l'algorithme est limité à la correction d'un sous-domaine actif à la fois.

C'est dans le but de développer des méthodes itératives parallèles, pour résoudre de grands systèmes linéaires creux, qu'est apparue la méthode additive, dite **Additive Schwarz**



**Method.** Cette méthode a été développée de manière indépendante à la première [35]. Le dessein de ces développements était de pouvoir résoudre, de façon parallèle, afin de pouvoir utiliser des processeurs séparés. Lorsque la méthode est dite additive, la projection est faite simultanément sur les sous-domaines. Pour cela, le problème décomposé (1.8) est remplacé par :

$$\begin{aligned} L u_1^n &= f & \text{sur } \Omega_1 & & L u_2^n &= f & \text{sur } \Omega_2 \\ u_1^n &= 0 & \text{sur } \partial\Omega_1 \setminus \Gamma_1 & & u_2^n &= 0 & \text{sur } \partial\Omega_2 \setminus \Gamma_2 \\ u_1^n &= u_2^{n-1} & \text{sur } \Gamma_1 & & u_2^n &= u_1^{n-1} & \text{sur } \Gamma_2 \end{aligned} \quad (1.13)$$

Dans la dernière équation, le champ de déplacement qui est appliqué à chaque sous-domaine est la solution de l'itération précédente. Cela ralentit la convergence et peut même la rendre inaccessible mais cette approche permet de rendre complètement découplé, à chaque itération, la résolution sur les sous-domaines. La solution itérative est alors obtenue par une combinaison de la solution de chaque sous-domaine.

$$\overrightarrow{u^{n+1}} = \overrightarrow{u^n} + [\underline{R}_1^T \underline{A}_{\Omega_1}^{-1} \underline{R}_1 + \underline{R}_2^T \underline{A}_{\Omega_2}^{-1} \underline{R}_2](\overrightarrow{b} - \underline{A} \overrightarrow{u^n}) \quad (1.14)$$

$$\text{ASM : } \overrightarrow{u^{n+1}} = \overrightarrow{u^n} + \sum_i [\underline{R}_i^T \underline{A}_{\Omega_i}^{-1} \underline{R}_i](\overrightarrow{b} - \underline{A} \overrightarrow{u^n}) \quad (1.15)$$

Ainsi, dans le cadre de la méthode ASM, le nombre de sous-domaines peut correspondre au nombre de processeurs qu'il est possible d'utiliser, permettant ainsi d'accélérer le processus de résolution à chaque itération.

Une version améliorée de l'approche ASM est la **Restricted Additive Schwarz Method** [26, 25]. Cette variante réduit le coût d'utilisation en utilisant une matrice de restriction  $R_i^0$  qui réduit à la partie non superposée du sous-domaine  $\Omega_i$ , soit uniquement l'interface de l'autre sous-domaine. Ainsi le calcul d'une itération du champ de déplacement est égal à :

$$\text{RASM : } \overrightarrow{u^{n+1}} = \overrightarrow{u^n} + \sum_i [(\underline{R}_i^0)^T \underline{A}_{\Omega_i}^{-1} \underline{R}_i](\overrightarrow{b} - \underline{A} \overrightarrow{u^n}) \quad (1.16)$$

La méthode RASM donne des meilleurs résultats que la méthode ASM, tant en terme de diminution du nombre d'itérations, que de temps CPU ainsi que de coûts mémoire. Cette réduction est obtenue grâce au fait qu'une partie des échanges de données est évitée entre les sous-domaines.

De cette méthode a découlé la **Additive Schwarz with Harmonic extension Method**, qui est voisine de la RASM et a un comportement équivalent :

$$\text{ASHM : } \overrightarrow{u^{n+1}} = \overrightarrow{u^n} + \sum_i [\underline{R}_i^T \underline{A}_{\Omega_i}^{-1} \underline{R}_i^0](\overrightarrow{b} - \underline{A} \overrightarrow{u^n}) \quad (1.17)$$

Ainsi que la **Restricted Additive Schwarz with Harmonic extension Method** qui est la réunion de ces deux approches. Elle présente l'avantage d'être symétrique mais donne des



moins bons résultats que les approches dont elle est issue. Le déplacement est obtenu comme suit :

$$\textbf{RASHM : } \quad \overline{u^{n+1}} = \overline{u^n} + \sum_i [(R_i^0)^T \underline{A}_{\Omega_i}^{-1} R_i^0] (\overline{b} - \underline{A} \overline{u^n}) \quad (1.18)$$

La dernière approche qui découle de la ASM est la **Weighted Additive Schwarz Method** qui définit les matrices de restriction avec une certaine pondération afin que la somme totale soit égale à l'identité.

$$\textbf{WASM : } \quad \overline{u^{n+1}} = \overline{u^n} + \sum_i [\underline{R}_{i,w}^T \underline{A}_{\Omega_i}^{-1} \underline{R}_i] (\overline{b} - \underline{A} \overline{u^n}) \quad (1.19)$$

Les méthodes de Schwarz font encore l'objet de nombreux travaux et font partie de certaines bibliothèques d'outils standardisés pour le calcul scientifique tel que le PETSc [6]. Cependant leurs usages ne sont, a priori, pas destinés à introduire des formulations locales différentes et leurs mises en données demeurent spécifiques.

Parmi les derniers travaux concernant les méthodes de Schwarz, il y a ceux de Brezzi et al [24] qui utilisent les transferts de champs et des régularisations adéquates afin d'améliorer la convergence. La ASM a aussi été optimisée pour résoudre des problèmes fortement hétérogènes de décomposition de domaine non recouvrants [82] ainsi que pour être employée avec des techniques de zooms numériques [57].

Une extension importante de la méthode de Schwarz est aussi retrouvée dans le domaine de la mécanique des fluides avec la méthode Chimère [113, 29, 24] qui permet de perfectionner la simulation de fluide autour d'obstacles rigides à géométries complexes. Un maillage grossier caractérise le fluide qui n'est pas au voisinage immédiat des obstacles. Pour les zones proches des obstacles, un maillage plus fin permet de mieux prendre en compte l'interaction du fluide avec l'obstacle.

Il est à noter que les travaux de Schwarz sont le point de départ des méthodes de décomposition de domaine sans recouvrement. Ces méthodes sont détaillées dans le troisième chapitre ( cf chapitre 3).

### Méthode LaTIn micro-macro

La méthode LaTIn micro-macro de Ladevèze et Dureisseix [73, 74] a été développée afin d'associer au mieux les techniques classiques d'homogénéisation et les stratégies de résolution par décomposition de domaine mixte sans recouvrement. Cette approche découpe la structure en sous-structures et interfaces avec, dans le même temps, une séparation des inconnues  $s$  (déplacements, efforts d'interfaces, contraintes, déformations) en une somme d'inconnues de type "micro" et "macro", i.e.,  $s = s^M + s^m$  où  $s^M$  et  $s^m$  représentent les composantes Macro et micro respectivement. L'échange entre les deux échelles s'effectue au niveau des interfaces où les inconnues macro sont uniquement définies, à l'aide d'une "rigidité" d'interface, alors que les inconnues micro évoluent dans les sous-structures.

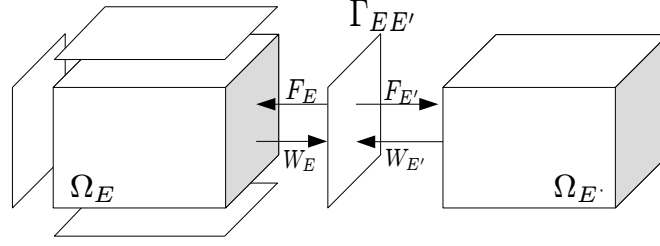


Figure 1.11 — Décomposition de la structure en sous-structures et interfaces

Pour clarifier, nous considérons un domaine  $\Omega$  séparé en deux sous-domaines  $\Omega_E$  et  $\Omega_{E'}$  avec pour interface de communication  $\Gamma_{EE'}$ . Comme pour un problème standard, sur chaque sous-domaine, les équations linéaires de compatibilité cinématique, d'équilibre ainsi que les équations de relation constitutive du modèle sont établies. Sur l'interface, les équations de raccord régissant le comportement sont l'équation d'équilibre des efforts et l'équation de continuité des déplacements :

$$\begin{cases} \vec{F}_E + \vec{F}_{E'} = \vec{0} \\ \vec{F}_E = \mathcal{A}_{\Gamma_{EE'}}(\vec{W}_E, \vec{W}_{E'}) \end{cases} \quad (1.20)$$

Avec  $\vec{F}$  le champ d'efforts,  $\vec{W}$  le champ de déplacement et  $\mathcal{A}_{\Gamma_{EE'}}$  qui est l'opérateur décrivant le comportement de l'interface. Si l'interface est parfaite, les conditions de continuité du champ de déplacement sont assurées par :

$$\vec{W}_E = \vec{W}_{E'} \quad (1.21)$$

L'ensemble des variables d'états est séparé en deux parties : la partie macro, notée  $M$  et la partie micro, notée  $m$ . Sur chaque interface  $\Gamma_{EE'}$ , les champs d'efforts et de déplacements sont décomposés ainsi :

$$\vec{F}_{E|\Gamma_{EE'}} = \vec{F}_{E|\Gamma_{EE'}}^M + \vec{F}_{E|\Gamma_{EE'}}^m \quad (1.22)$$

$$\vec{W}_{E|\Gamma_{EE'}} = \vec{W}_{E|\Gamma_{EE'}}^M + \vec{W}_{E|\Gamma_{EE'}}^m \quad (1.23)$$

Deux types de séparations peuvent être envisagés :

- Le premier est basé sur le champ d'effort qui est projeté sur l'interface, par l'intermédiaire d'un opérateur de projection  $\Pi_{\Gamma_{EE'}}^F$ , afin de distinguer un champ macro et un champ micro.

$$\vec{F}_{E|\Gamma_{EE'}}^M = \Pi_{\Gamma_{EE'}}^F(\vec{F}_{E|\Gamma_{EE'}}) \quad (1.24)$$

$$\vec{F}_{E|\Gamma_{EE'}}^m = [I_d - \Pi_{\Gamma_{EE'}}^F](\vec{F}_{E|\Gamma_{EE'}}) \quad (1.25)$$

La part macro correspondante, du champ de déplacement, est obtenue par la dualité du travail de contribution :

$$\langle \overrightarrow{F_E}, \overrightarrow{W_E} \rangle_{\Gamma_{EE'}} = \langle \overrightarrow{F_E^m}, \overrightarrow{W_E^m} \rangle_{\Gamma_{EE'}} + \langle \overrightarrow{F_E^M}, \overrightarrow{W_E^M} \rangle_{\Gamma_{EE'}} \quad (1.26)$$

$$\text{avec } \langle F_E^i, W_E^i \rangle_{\Gamma_{EE'}} = \int_{\Gamma_{EE'}} F_{E|\Gamma_{EE'}}^i \cdot W_{E|\Gamma_{EE'}}^i d\Gamma \quad (i = m, M) \quad (1.27)$$

Ainsi les nouvelles quantités d'interfaces sont introduites telles que :

$$(\overrightarrow{F^M}, \overrightarrow{W^M}) \in \mathcal{F}_{ad}^M \times \mathcal{W}_{ad}^M, \quad (1.28)$$

$$(\overrightarrow{F^m}, \overrightarrow{W^m}) \in \mathcal{F}^m \times \mathcal{W}^m \quad (1.29)$$

Avec  $\mathcal{F}^m$  l'espace des efforts micro,  $\mathcal{F}^M$  l'espace des efforts macro,  $\mathcal{W}^m$  l'espace des déplacements micro et  $\mathcal{W}^M$  l'espace des déplacements macro. Suivant la stratégie basée sur le champ d'effort, nous choisissons l'espace des efforts macro admissibles  $\mathcal{F}_{ad}^M$  tel que  $\overrightarrow{F^M}$  vérifie les conditions de transmission de chaque interface et soit en équilibre avec chaque sous-structure.

$$\mathcal{F}_{ad}^M = \{ \overrightarrow{F^M} \in \mathcal{F}^M / \forall E \in E, \forall E' \in E_E, E' \neq E, \overrightarrow{F_E^M} + \overrightarrow{F_{E'}^M} = \vec{0} \text{ sur } \Gamma_{EE'} \} \quad (1.30)$$

Avec  $E_E$  l'ensemble des sous-structures  $E$ .

- Le second est basé sur le champ de déplacement projeté sur l'interface, par l'intermédiaire d'un opérateur de projection  $\Pi_{\Gamma_{EE'}}^W$ , afin d'avoir, de la même façon, les champs micro et macro :

$$\overrightarrow{W_{E|\Gamma_{EE'}}^M} = \Pi_{\Gamma_{EE'}}^W(\overrightarrow{W_{E|\Gamma_{EE'}}}) \quad (1.31)$$

$$\overrightarrow{W_{E|\Gamma_{EE'}}^m} = [\underline{I}_d - \Pi_{\Gamma_{EE'}}^W](\overrightarrow{W_{E|\Gamma_{EE'}}}) \quad (1.32)$$

La part macro correspondante, du champ d'efforts, est aussi obtenue par la dualité du travail de contribution :

$$\langle \overrightarrow{F_E}, \overrightarrow{W_E} \rangle_{\Gamma_{EE'}} = \langle \overrightarrow{F_E^m}, \overrightarrow{W_E^m} \rangle_{\Gamma_{EE'}} + \langle \overrightarrow{F_E^M}, \overrightarrow{W_E^M} \rangle_{\Gamma_{EE'}} \quad (1.33)$$

$$\text{avec } \langle F_E^i, W_E^i \rangle_{\Gamma_{EE'}} = \int_{\Gamma_{EE'}} F_{E|\Gamma_{EE'}}^i \cdot W_{E|\Gamma_{EE'}}^i d\Gamma \quad (i = m, M) \quad (1.34)$$

Les nouvelles quantités d'interfaces sont définies telles que :

$$(\overrightarrow{F^M}, \overrightarrow{W^M}) \in \mathcal{F}_{ad}^M \times \mathcal{W}_{ad}^M, \quad (1.35)$$

$$(\overrightarrow{F^m}, \overrightarrow{W^m}) \in \mathcal{F}^m \times \mathcal{W}^m \quad (1.36)$$

Suivant la stratégie basée sur le champ de déplacement, nous choisissons l'espace des déplacements macro admissibles  $\mathcal{W}_{ad}^M$  tel que  $\overrightarrow{W}^M$  réalise les conditions de transmission de chaque interface et soit en équilibre avec chaque sous-structure.

$$\mathcal{W}_{ad}^M = \{ \overrightarrow{W}^M \in \mathcal{W}^M / \forall E \in E, \forall E' \in E_E, E' \neq E, \overrightarrow{W}_E^M = \overrightarrow{W}_{E'}^M \text{ sur } \Gamma_{EE'} \} \quad (1.37)$$

Un point important à noter, pour les deux approches, est que les efforts micro et les déplacements micro n'ont pas à satisfaire les conditions de transmission à travers l'interface. Au contraire, les quantités macro sont choisies dans le but de satisfaire ces conditions dans un sens faible.

Cette décomposition de domaine est ensuite résolue à l'aide de la méthode de calcul itérative non-incrémentale LaTIn (**L**arge **T**ime **I**ncrément) [72] en cherchant l'ensemble des champs de déplacement et des champs d'efforts micro et macro qui vérifient, simultanément, l'ensemble des équations globales linéaires  $A^d$  et l'ensemble des équations locales non linéaire  $\Gamma$ . La procédure de résolution recherche successivement un élément  $s$  de l'espace des champs admissibles  $A^d$  et un élément du second ensemble  $\Gamma$  à chaque itération. Durant l'étape locale, un élément  $s_n$  est sélectionné, appartenant à  $A^d$  pour déterminer un élément  $\hat{s}_{n+\frac{1}{2}}$  appartenant à  $\Gamma$  par la direction montante de recherche  $E^+$ . Ensuite, pour l'étape linéaire, le choix de l'élément  $\hat{s}_{n+\frac{1}{2}}$  appartenant à  $\Gamma$  est employé pour déterminer l'élément  $s_{n+1}$  appartenant à  $A^d$  par la direction descendante de recherche  $E^-$  et ainsi de suite jusqu'à obtenir la solution exacte  $s_f$  (cf figure 1.12).

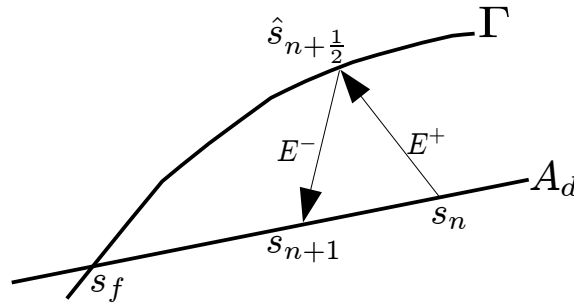


Figure 1.12 — Une itération de la méthode LATIN

L'approche LATIN micro-macro, reposant sur les principes des méthodes de décomposition de domaine, est résolue de façon parallèle et les problèmes de différence de discrétisation qui peuvent survenir, aux niveaux des interfaces, sont surmontées par l'utilisation des méthodes de raffinement (*h-adaptation*) ainsi que l'utilisation d'éléments de plus haut degrés (*p-adaptation*).

Cette approche multiéchelle a été appliquée à la résolution de problèmes de contact [75], de multi-contacts sur des systèmes de tenségrité par Nineb et al [90], multiéchelle en espace et en temps avec les grandeurs macro définies par un milieu de Cosserat [76], de suivi de fissure par un couplage avec l'approche X-FEM permettant d'obtenir une méthode non intrusive dans l'étude de Guidault et al [53, 52]. Des travaux récents de Trovalet et al. essayent de décrire plus précisément le comportement microscopique de matériaux composites avec

un modèle micro hybride discret ; pour les microfissures, le délaminage et les ruptures dans le sens des fibres ; et continu, pour décrire la plasticité, la viscosité et la dégradation diffuse [118]. D'autres travaux récents portent sur l'accélération de la résolution de la méthode en recherchant des approximations de directions de recherches radiales, des méthodes de résolution de modèles de type PGD (Proper Generalized Decomposition), pour la méthode LATIN [77].

### Méthode de type itérative globale-locale

L'approche itérative globale-locale de Gendre [46, 45] est basée sur l'approche de Whitcomb [123, 124, 125] ; elle est de type méthode de sous-domaine primale. Elle consiste à insérer un modèle local non-linéaire pouvant porter des détails géométriques, un raffinement de maillages ou encore une loi matériau différente. Cette stratégie de calcul repose sur le constat que certains phénomènes tels que la plasticité apparaissent souvent dans une zone limitée du domaine occupé par la structure étudiée. Ainsi, suite à un premier calcul global, il est possible de déterminer la région limitée qui nécessite une description plus fine. L'impact du modèle local est ensuite reporté sur le modèle global par le biais d'une correction au niveau de l'interface conférant ainsi un caractère multiéchelle. Cette technique présente l'avantage d'être non intrusive.

Dans cette approche, le modèle local remplace, dans une certaine zone  $\Omega^L$ , le modèle global. Le domaine global  $\Omega^G$  est alors divisé en deux régions : la partie superposée qui est corrigée par le modèle local et la partie complémentaire  $\Omega_C^G$  où perdure le comportement du modèle global. Le champ de déplacement est alors défini comme suit :

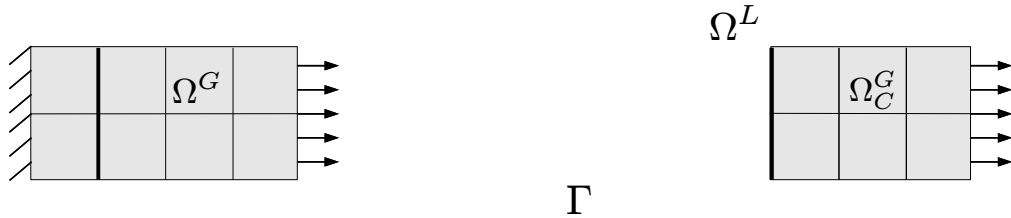


Figure 1.13 — Les différents modèles : Global, Local.

$$\vec{u} = \begin{cases} \vec{u}^L & \text{sur } \Omega^L \\ \vec{u}^G & \text{sur } \Omega_C^G \end{cases} \quad (1.38)$$

Le couplage des deux modèles est réalisé par une stratégie itérative. À chaque itération de calcul, trois étapes sont effectuées :

1. un calcul du modèle local avec des conditions limites issues du modèle global,
2. un calcul de résidu représentant le chargement relatif provenant du calcul local (Lorsqu'il devient assez faible, le système itératif est arrêté.),
3. en cas de non convergence, le résidu est injecté en tant que chargement supplémentaire afin de corriger le modèle global.

La communication entre les deux modèles est obtenue par l'intermédiaire de l'interface de la même manière que dans les approches de décomposition de domaine. Les conditions de transmission y sont classiques :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \vec{u}^L = \vec{u}^G & \text{sur } \Gamma \quad (a) \\ \underline{\underline{\sigma}}^L \vec{n}_i + \underline{\underline{\sigma}}^G \vec{n}_c = \vec{0} & \text{sur } \Gamma \quad (b) \end{array} \right. \quad (1.39)$$

où  $\Gamma$  désigne l'interface séparant les domaines tel que  $\Omega_C^G \cup \Omega^L$ . Dans [46, 45], L. Gendre utilise un point de vue primal en imposant la continuité des déplacements (1.39.(a)). L'équilibre des efforts (1.39.(b)) est atteint à convergence.

Cette stratégie itérative globale-locale a l'avantage d'être facilement intégrable dans un code de calcul. Ce qui la prédestine à une utilisation industrielle. Mais son spectre d'applications multi-modèles/échelles est limité. De plus, comme pour toutes les méthodes de type Schwarz, la convergence globale est une question critique. Nous renvoyons à [46] pour des considérations sur ce sujet.

### 1.2.3 Méthodes de superposition

Les approches numériques qui introduisent le chevauchement de modèles sont capables de mélanger un problème éléments finis particulier avec un autre problème de même type. Elles permettent d'insérer sur une structure donnée des détails spécifiques avec une description plus fine. Il suffit d'incorporer dans un second domaine éléments finis, le phénomène à adjoindre au problème initial. Ces approches numériques, qui utilisent la superposition, présentent l'avantage de s'approcher de méthodes non intrusives fortement plébiscitées par les bureaux d'études industriels (car ces méthodes permettent de travailler sur des modèles existants qui ont souvent demandés une longue période de conception.).

Afin d'illustrer la notion de superposition, le fonctionnement de deux approches est détaillé. La première est la *s-méthode*, accompagnée d'une méthode dérivée, la HSMM. La deuxième est la méthode de projection de Dirichlet homogénéisée.

#### S-méthode et la version HSSM

La s-méthode de Fish [41, 43, 42] est une stratégie d'analyse de type global-local. Elle est de la famille des techniques superposant un patch avec un maillage fin sur une structure possédant un maillage plus grossier (cf figure 1.14). Les discrétisations de chacun des domaines sont indépendantes entre elles. Le principal avantage de cette stratégie réside dans la facilité d'enrichissement local par un modèle fin.

Pour expliquer brièvement les principes de cette méthode, considérons, comme indiqué sur la figure (1.14), un domaine global  $\Omega^G$ , maillé "grossièrement". Imaginons que nous souhaitons tenir compte de la présence d'un défaut (type fissure) dans la zone d'intérêt (en pointillé sur la figure 1.14). La s-méthode propose alors de considérer un domaine local  $\Omega^L$ , comportant la fissure et maillé finement pour tenir compte des singularités de contraintes en fonds de fissure. Ce domaine/modèle local est superposé au domaine/modèle global dans la zone d'intérêt et la solution  $\vec{u}(\vec{x})$  est recherchée sous la forme additive suivante :

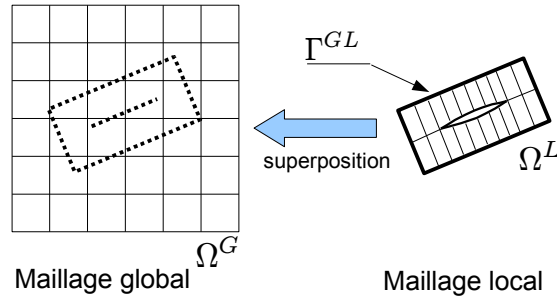


Figure 1.14 — Schéma d'illustration de la méthode s-version

$$\overrightarrow{u}(\overrightarrow{x}) = \begin{cases} \overrightarrow{u}^G(\overrightarrow{x}) & \text{avec } \overrightarrow{x} \in \Omega^G - \Omega^L \\ \overrightarrow{u}^G(\overrightarrow{x}) + \overrightarrow{u}^L(\overrightarrow{x}) & \text{avec } \overrightarrow{x} \in \Omega^L \end{cases} \quad (1.40)$$

Afin d'assurer la continuité du champ de déplacement total, le champ local est annulé sur la frontière du domaine local ( $\overrightarrow{u}^L(\overrightarrow{x}) = 0$  sur  $\Gamma^{GL}$ ). Le système linéaire résultant de cette méthode s'écrit alors en fonction des variables globales et locales ( $\overrightarrow{u}^L(\overrightarrow{x})$ ,  $\overrightarrow{u}^G(\overrightarrow{x})$ ). Cette méthode pose quelques difficultés techniques surmontables, liées à l'évolution des termes de couplage entre fonctions de base globales et locales. Son principal inconvénient est la redondance et/ou la quasi-redondance qu'elle peut produire dans le cas général. Elles ne sont pas toujours possible d'être isoler dans un contexte industriel, où il peut exister d'autres sources de dégénérescence.

La s-méthode a été développée, à l'origine, pour résoudre des problèmes de plaques et coques laminées multi-couches [43, 42] en 2D. L'approche a été améliorée en utilisant des indicateurs d'erreurs pour localiser les régions critiques qui nécessitent une description plus précise par un maillage local. Des travaux récents utilisent la s-méthode pour simuler la propagation de fissures en 2D [93]. L'approche HSMM, pour **H**ierarchical **S**imultaneous **M**ultiple **M**odel, de Reddy et Robbins [103, 105] a été développée sur la base de la s-méthode. Il s'agit d'une approche multi-modèle développée pour les simulations de structures en matériaux composites. Elle permet de coupler un modèle ESL (**E**quivalent **S**ingle **L**ayer) avec un modèle LW (**L**ayer**W**ise).

### Méthode de projection de Dirichlet homogénéisée

L'approche de Dirichlet homogénéisée dite HDPM (Homogenized Dirichlet Projection Method) a été introduite par Oden et Zohdi [129, 92, 91] pour permettre de résoudre de façon multiéchelle un problème avec un matériau fortement hétérogène. Le comportement est limité au cas d'élasticité linéaire.

Cette méthode utilise deux niveaux de modélisation.

- le niveau macro est caractérisé par un modèle éléments finis régulier relativement grossier avec une loi de comportement basée sur une homogénéisation du comportement

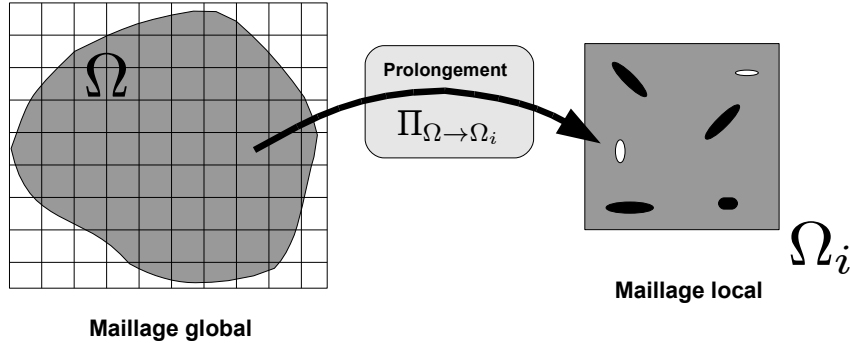


Figure 1.15 — Représentation des deux niveaux de modélisation de la méthode HDPM.

du matériau. Un élément du maillage grossier correspond à une zone représentative du matériau considéré.

- le niveau micro est limité au domaine de la cellule. Il peut y avoir plusieurs problèmes cellulaires qui sont indépendants entre eux. La cellule est constituée d'un maillage éléments finis fin qui représente les différents détails et caractéristiques particulières du matériau pour décrire le comportement hétérogène de celui-ci.

Le modèle macro est enrichi par le modèle micro : la solution globale est corrigée par des calculs locaux effectués sur des cellules identifiées à partir d'estimateurs d'erreurs. Des estimateurs de sensibilité sont construits sur la solution macro afin de localiser les éléments du maillage macro qui nécessitent une réanalyse. Dans un second temps, pour les cellules considérées  $\Omega_i$ , le champ de déplacement global  $\vec{u}^G$  est imposé au niveau de la frontière de la cellule micro, lorsque les frontières n'ont pas de conditions préalablement assujetties, afin de calculer le champ de déplacement local  $\vec{u}^L$  satisfaisant l'équilibre. Ces différents champs locaux sont ensuite reportés sur le modèle macro grâce à des opérateurs de prolongement  $\Pi_{\Omega_i \rightarrow \Omega}$  pour corriger le champ global.

$$\vec{u} = \vec{u}^G + \sum_{\Omega_i} \Pi_{\Omega_i \rightarrow \Omega} (\vec{u}_i^L - \vec{u}^G) \quad (1.41)$$

Cette approche multiéchelle utilise un comportement homogénéisé qui n'est modifié que dans certaines zones nécessitant une correction apportée par un modèle fin. Il est démontré que l'erreur, après correction, est toujours inférieure à celle obtenue précédemment, prouvant la fiabilité de la méthode (au pire, le domaine macro est entièrement couvert de patches micro.). Il est important de noter que la méthode de Dirichlet homogénéisée donne une correction localisée qui est adaptée à l'échelle de modélisation du matériau et non à sa discrétisation.

La méthode a été améliorée par un raccord en efforts [130] et après une étude sur les erreurs de modélisation effectuée par Moës et al. [88], une technique de correction globale permettant d'atténuer les sauts d'efforts entre les cellules a été mise en place par Zohdi et al. [131].



## 1.3 Bilan

Après une présentation de la problématique industrielle à l'origine de ces travaux de thèse, nous avons décrit brièvement et commenté des méthodes multiéchelles adaptées à notre problématique. Ceci nous permet, entre autres, de situer la méthode Arlequin utilisée dans nos travaux et présentée dans le chapitre suivant.



---

## La méthode Arlequin

### Principes et Mise en œuvre

Ce second chapitre présente plus particulièrement la méthode multiéchelle Arlequin sur laquelle sont basés nos travaux.

Dans un premier temps, nous exposons les trois constituants clés de la formulation Arlequin qui permettent d'aboutir au problème Arlequin, pour le cas particulier d'un couplage entre deux domaines. Dans un second temps, nous décrivons la façon dont la méthode a été mise en œuvre numériquement, dans le code de calcul éléments finis : Z-set/ZéBuLoN. Nous observons que ces développements permettent une mise en œuvre séparée de modèles incompatibles superposés, avec une communication qui s'effectue par le biais d'un maillage intermédiaire. Enfin, nous donnons certaines recommandations ainsi que l'explication des spécificités liées à l'opérateur de couplage énergétique dans le cas de superpositions de maillages incompatibles.

## 2.1 Introduction

La méthode Arlequin a été développée et testée sur des problèmes modèles par H. Ben Dhia [12, 13]. Sa première analyse mathématique a été réalisée dans le cadre des travaux de thèse de G. Rateau [18]. Son intégration, dans un code de calcul industriel (*Code\_Aster*) a également été réalisée dans le cadre des travaux de thèse de Rateau [19, 101]. Ces premiers travaux ont permis de vérifier les bases mathématiques de l'approche. Ils ont également permis de développer les premières techniques de mise en œuvre de la méthode dans un cadre industriel et de démontrer sa pertinence comme méthode multimodèle flexible et générale [16, 19, 101].

Développée depuis une quinzaine d'années, la méthode Arlequin a été utilisée dans de nombreux domaines de la mécanique :

- en statique, pour introduire des défauts dans des structures [13, 19, 16], coupler des modèles de structures [12, 13, 16] ou des modèles de composites sandwichs [59, 60, 61, 56], traiter des problèmes de contacts en localisant les zones de contact [22, 20], tenir compte des couches limites [12, 62], coupler des modèles discrets et continus [8, 95], coupler des modèles atomistiques et continus [96, 9, 28] ou encore, plus récemment, pour coupler des modèles déterministes et stochastiques [32] ou des modèles granulaires et continus [122]. Elle a aussi été utilisée pour propager de l'endommagement et des fissures [17, 67].
- en dynamique, pour coupler et simuler des propagations d'ondes hautes fréquences dans un domaine à deux échelles spatiales [21], pour des impacts en couplant éléments finis et méthode SPH [30, 27] et également pour des couplages dynamiques moléculaires/dynamique continuum [126].

Les constituants de la méthode Arlequin ont été étudiés dans différents papiers [18, 19, 16, 51, 14]. La parallélisation de la méthode a été réalisée récemment dans des cadres modèles [15, 37].

Les travaux que nous présentons, dans cette thèse, prolongent ceux développés dans le cadre de la thèse de N. Elkhodja [15, 37] à un cadre industriel.

Dans la suite du chapitre, nous rappelons ce qu'est la méthode Arlequin et nous détaillons notre mise en œuvre de cette méthode dans le Code Z-set/ZéBuLoN [132]. Le chapitre se termine par quelques résultats numériques montrant une première validation de nos développements.

## 2.2 Le problème d'élasticité classique

Voici la description du problème modèle que nous allons étudier. Considérons un domaine  $\Omega_0$  de  $\mathbb{R}^n$  ( $n=2$  ou  $3$ ) sur lequel est posé un problème d'élasticité linéaire (voir figure 2.1).  $\partial\Omega_0$  désigne la frontière de ce domaine qui est divisée en deux parties telle que  $\partial\Omega_0 = \Gamma_u \cup \Gamma_T$ . Un déplacement  $\vec{u}^0$  est imposé sur la partie  $\Gamma_u$ . Sur la partie complémentaire  $\Gamma_T$  agit un effort surfacique  $\vec{T}$ . Un effort volumique  $\vec{f}$  est imposé sur le domaine  $\Omega_0$ . Le comportement reliant le tenseur des contraintes  $\underline{\underline{\sigma}}$  et le tenseur des déformations  $\underline{\underline{\epsilon}}$  obéit à

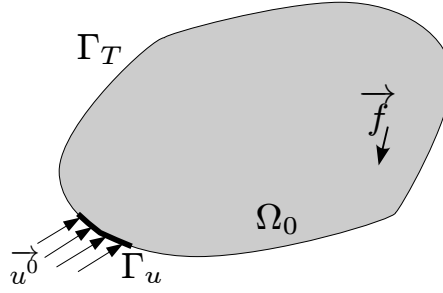


Figure 2.1 — Problème d'élasticité classique.

la loi de Hooke.

$$\underline{\underline{\sigma}} = \mathbf{a} : \underline{\underline{\epsilon}} \quad (2.1)$$

L'équilibre fort de ce solide s'écrit :

$$\operatorname{div} \underline{\underline{\sigma}} + \vec{f} = \vec{0}, \text{ dans } \Omega_0 \quad (2.2)$$

Son équilibre faible, utilisant la loi de comportement (2.1) et les conditions aux limites, consiste à rechercher  $\vec{u} \in \mathcal{W}_{u^0}^{ad}$  tel que :

$$\forall \vec{u}^* \in \mathcal{W}_0^{ad}, k(\vec{u}, \vec{u}^*) = l(\vec{u}^*) \quad (2.3)$$

$$k(\vec{u}, \vec{u}^*) = \int_{\Omega_0} \underline{\underline{\sigma}}(\vec{u}) : \underline{\underline{\epsilon}}(\vec{u}^*) dv \quad (2.4)$$

$$l(\vec{u}^*) = \int_{\Omega_0} \vec{f} \cdot \vec{u}^* dv + \int_{\Gamma_T} \vec{T} \cdot \vec{u}^* ds \quad (2.5)$$

avec

$$\mathcal{W}_{u^0}^{ad} = \left\{ \vec{u}^* \in (\mathcal{H}^1(\Omega_0))^n; \vec{u}^* = \vec{u}^0 \text{ sur } \Gamma_u \right\} \quad (2.6)$$

$k(\vec{u}, \vec{u}^*)$  représente le travail virtuel des forces internes et  $l(\vec{u}^*)$  le travail virtuel des forces externes. La formulation énergétique du problème revient à minimiser l'énergie  $E$  sur l'espace des déplacements cinématiquement admissibles  $\mathcal{W}_{u^0}^{ad}$ . Elle s'écrit :

$$\begin{aligned} \arg \min_{\vec{u}^* \in \mathcal{W}_{u^0}^{ad}} \quad & E(\vec{u}^*) \\ E(\vec{u}^*) = \quad & \frac{1}{2} k(\vec{u}^*, \vec{u}^*) - l(\vec{u}^*) \end{aligned} \quad (2.7)$$

Si les données du problème sont régulières et que  $\operatorname{mes}(\partial_u \Omega) > 0$ , alors le champ  $\vec{u}$ , solution de (2.3)-(2.6) ou de (2.6)-(2.7), est défini de façon unique.

## 2.3 La méthode Arlequin

La méthode Arlequin a été développée pour permettre la résolution numérique de problèmes mécaniques pour lesquels une représentation macro (grossière) est suffisante, sauf en des zones localisées (que l'on qualifiera de zones d'intérêt). Dans ces zones, des représentations micro (fines) sont nécessaires. Les phénomènes micro et macro sont fortement couplés tels souhaités pour la problématique soulevée en introduction. Il s'agit d'une méthode multiéchelle. Elle est fondée sur trois constituants clés : la superposition de modèles, la partition des énergies et les couplages énergétiques des modèles superposés. Pour expliciter ces constituants, nous considérons le cas typique représenté sur la figure (2.2(c)) (substitution) et nous restons dans le cadre de l'élasticité linéaire.

### 2.3.1 Superposition

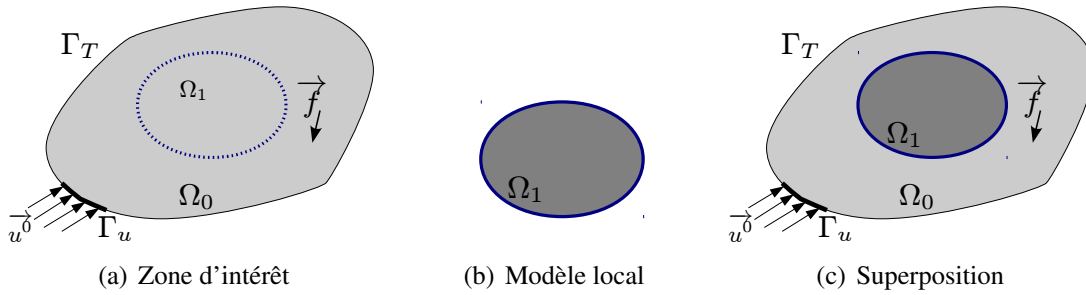


Figure 2.2 — Problème multimodèle constitué de deux domaines.

Considérons toujours le cas du solide élastique linéaire, occupant le domaine  $\Omega_0$ , comme présenté à la section (2.2). Supposons que nous avons identifié une zone d'intérêt, c'est à dire un sous-domaine  $\Omega_1$  de  $\Omega_0$  (cf figure 2.2(a)), dans lequel la modélisation héritée de celle globale, utilisée dans  $\Omega_0$ , n'est pas suffisamment précise. Pour pouvoir adapter le modèle global de cette zone, la première idée de la méthode Arlequin est de concevoir le modèle local complet souhaité (cf figure 2.2(b)) et de le superposer au modèle global dans la zone d'intérêt (cf figure 2.2(c)). Ainsi, dans la zone d'intérêt, nous pouvons disposer de deux représentations mécaniques différentes et, donc, de deux états mécaniques différents.

### 2.3.2 Partition énergétique

Le second constituant de la méthode Arlequin est une conséquence du premier. En effet, la coexistence de deux états mécaniques dans une même zone  $\Omega_1$  d'un solide impose, par simple exigence de conservation des énergies, de répartir ces énergies entre ces états. Dans la méthode Arlequin, cette répartition est réalisée par l'introduction de fonctions poids qui forment une partition de l'unité sur  $\Omega_0$ , dans le sens où leur somme sur  $\Omega_0$  vaut toujours 1. Ces fonctions peuvent être soit constantes, soit variables (cf figures 2.3).

Plus concrètement, si nous considérons le problème de l'élasticité exprimé de manière faible primale, les états mécaniques sont formés par les champs des déplacements  $\vec{u}_0$  global,

défini sur tout  $\Omega_0$ , et  $\vec{u}_1$  local, défini seulement sur  $\Omega_1$ .

Les travaux virtuels des forces internes et externes pour les modèles macro et micro sont des "portions" de ceux du problème classique mono-modèle. Pour  $i = \{0, 1\}$ , ils sont définis par :

$$k_i(\vec{u}_i, \vec{v}_i) = \int_{\Omega_i} \alpha_i \underline{\sigma}(\vec{u}_i) : \underline{\epsilon}(\vec{v}_i) dv \quad (2.8)$$

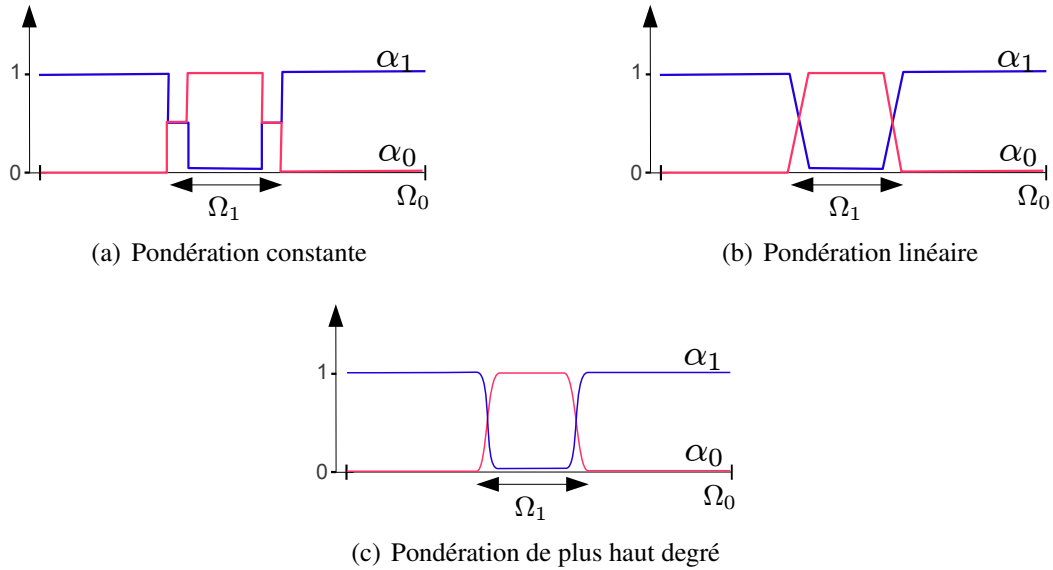
$$l_0(\vec{v}_0) = \int_{\Omega_0} \alpha_0 \vec{f}_0 \cdot \vec{v}_0 dv + \int_{\Gamma_T} \vec{T}_0 \cdot \vec{v}_0 ds \quad (2.9)$$

$$l_1(\vec{v}_1) = \int_{\Omega_1} \alpha_1 \vec{f}_1 \cdot \vec{v}_1 dv \quad (2.10)$$

où les poids  $\alpha_i$  vérifient :

$$\begin{aligned} \text{Sur } \Omega_0/\Omega_1, \quad & \alpha_0 = 1; \alpha_1 = 0; \\ \text{Sur } \Omega_1, \quad & \alpha_0 + \alpha_1 = 1 \end{aligned} \quad (2.11)$$

Sur la figure (2.3), nous représentons plusieurs fonctions de pondération.



**Figure 2.3** — Les différents types de fonctions de pondération

Observons ici que, pour simplifier la présentation et sans réduire la généralité, nous avons supposé  $\partial\Omega_0 \cup \partial\Omega_1 = \emptyset$ . Notons qu'il est possible d'utiliser des pondérations différentes pour les travaux virtuels internes et externes.

### 2.3.3 Liaison entre les domaines

Le dernier constituant clé de la méthode est le raccord entre les deux domaines. Plusieurs méthodes peuvent être utilisées (cf [12, 13, 16, 19, 18, 14]). Nous considérons ici la mé-

thode de couplage énergétique basée sur une méthode de Lagrange en volume. Dans ce cas, l'opérateur de couplage peut s'écrire :

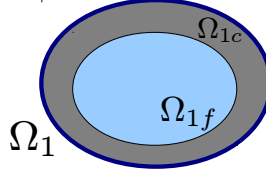


Figure 2.4 — Division du modèle local.

$$c(\vec{\mu}, \llbracket \vec{u} \rrbracket) = \int_{\Omega_{1c}} \vec{\mu} \cdot \llbracket \vec{u} \rrbracket + l^2 \underline{\underline{\epsilon}}(\vec{\mu}) : \underline{\underline{\epsilon}}(\llbracket \vec{u} \rrbracket) dv, \forall \mu \in \mathcal{M} \quad (2.12)$$

où  $\mathcal{M}$  est un espace qualifié de médiateur,  $\Omega_{1c}$  est la sous-zone de  $\Omega_1$  servant au couplage. Sa partie complémentaire dans  $\Omega_1$  est  $\Omega_{1f}$  (cf figure 2.4) et  $l$  est une longueur caractéristique. Cet opérateur a de multiples variantes (cf 2.49, 2.50, 2.51). Une étude de l'influence de tel ou tel choix est réalisée dans la suite de ce chapitre.

### 2.3.4 Formulation continue du problème Arlequin

Grâce à ces trois constituants, le problème classique d'élasticité (2.3)-(2.6) est transformé en la recherche de trois champs  $(\vec{u}_0, \vec{u}_1, \vec{\lambda})$  dans  $\mathcal{W}_0 \times \mathcal{W}_1 \times \mathcal{M}$ , tels que :

$$\begin{aligned} \forall \vec{v}_0 \in \mathcal{W}_0, k_0(\vec{u}_0, \vec{v}_0) + c(\vec{\lambda}, \vec{v}_0) &= l_0(\vec{v}_0) \\ \forall \vec{v}_1 \in \mathcal{W}_1, k_1(\vec{u}_1, \vec{v}_1) - c(\vec{\lambda}, \vec{v}_1) &= l_1(\vec{v}_1) \\ \forall \vec{\mu} \in \mathcal{M}, c(\vec{\mu}, \vec{u}_0 - \vec{u}_1) &= 0 \end{aligned} \quad (2.13)$$

où  $k_i, l_i$  ( $i = \{0, 1\}$ ) et  $c$  sont définis par (2.8), (2.9), (2.10) et (2.12). Dans ce système, les espaces de champs de déplacements cinématiquement admissibles sont  $\mathcal{W}_{u_0} = \{\vec{v}_0 \in (\mathcal{H}^1(\Omega_0))^n; \vec{v}_0 = \vec{u}^0 \text{ sur } \Gamma_u\}$ ,  $\mathcal{W}_1 = \{\vec{v}_1 \in (\mathcal{H}^1(\Omega_1))^n\}$  et  $\mathcal{M} = \{\vec{\mu} \in (\mathcal{H}^1(\Omega_{1c}))^n\}$ . Le problème (2.13) est la formulation Arlequin (bi-modèle) équivalente au problème classique (2.3), (2.4) et (2.5) (cf ref [14]). L'intérêt majeur de cette formulation est qu'elle permet de changer, quasiment à volonté, le modèle local, appelé aussi patch. La stabilité de ce problème Arlequin est établie dans [18] puis dans [14] dans un cadre plus large.

## 2.4 Discrétisation et mise en œuvre numérique

La mise en œuvre de la méthode Arlequin est effectuée avec deux exigences majeures : d'une part la robustesse de résolution numérique du problème et d'autre part la facilité d'utilisation par des non experts de la méthode. Ces exigences expliquent en grande partie les choix effectués dans notre démarche. Observons que notre mise en œuvre permet aussi, pour



des utilisateurs plus expérimentés, de modifier les paramètres relatifs à la méthode Arlequin lors de simulations plus complexes.

La mise en œuvre est réalisée dans le code de calcul Z-set/ZéBuLoN [132], logiciel dédié aux domaines de la recherche et du développement (développé en partenariat entre l’Onera, l’école des Mines de Paris et NorthWest Numerics). Ce logiciel, basé sur la méthode des éléments finis, présente l’avantage d’être capable de traiter des problèmes industriels, tout en étant suffisamment souple pour expérimenter de nouveaux outils numériques.

L’approximation numérique d’un problème Arlequin est réalisée par la méthode des éléments finis (ici des éléments de Lagrange). La mise en œuvre réalisée dans nos travaux permet de traiter des problèmes bidimensionnels et tridimensionnels. Rappelons que la méthode Arlequin permet aussi le couplage de modèles de structures différents (poutre/3D, coque/3D, etc.) [101, 59, 97, 16].

### 2.4.1 Discrétisation de la formulation continue Arlequin

Pour simplifier la présentation, le développement de notre mise en œuvre est effectué sur un problème de couplage entre deux modèles linéaires. Le couplage (2.12), faisant intervenir trois champs, on fait le choix de définir une discrétisation éléments finis pour chaque champ. Les domaines où sont définis ces champs sont maillés. Nous notons  $\mathcal{T}^k$  ( $k = \{0, 1, c\}$ ) les maillages résultants. Ils sont constitués d’un nombre fini d’éléments  $D_k^e$ . Nous supposons que :

$$\mathcal{T}^k = \{D_k^e; e = \{1, n^k\}\} \quad (2.14)$$

$$\Omega_k = \bigcup_{D_k^e \in \mathcal{T}^k} D_k^e \quad (2.15)$$

Dans la suite, nous notons  $\Omega_c$  par  $\Omega_{1c}$  pour plus de cohérence. Nous supposons également que ces maillages soient réguliers au sens classique du terme (cf e.g. [31, 64]). Sur les trois domaines, les champs sont définis par des approximations, faisant intervenir les variables nodales. Ainsi, les approximations éléments finis des champs s’écrivent en fonction des degrés de liberté globaux  $U_k$  et des fonctions de formes d’éléments  $N_k$  :

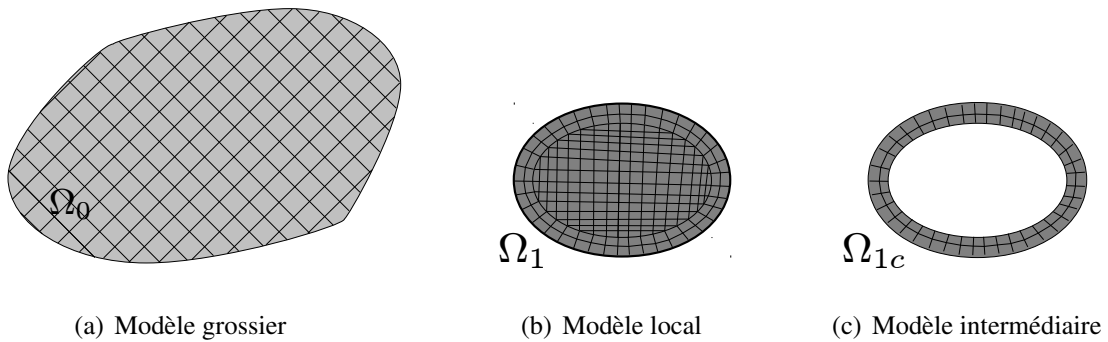


Figure 2.5 — Représentation éléments finis de trois domaines.

$$\forall(\vec{x}) \in \Omega_0, \quad \overrightarrow{u_0(\vec{x})} = \sum_{i=1}^{n^0} N_0^i(\vec{x}) \cdot (U_0)_i \quad (2.16)$$

$$\forall(\vec{x}) \in \Omega_1, \quad \overrightarrow{u_1(\vec{x})} = \sum_{j=1}^{n^1} N_1^j(\vec{x}) \cdot (U_1)_j \quad (2.17)$$

$$\forall(\vec{x}) \in \Omega_{1c}, \quad \overrightarrow{\lambda(x)} = \sum_{k=1}^{n^c} N_c^k(\vec{x}) \cdot \Lambda_k \quad (2.18)$$

où  $n^k$  ( $k \in \{0, 1, c\}$ ) désigne le nombre de degrés de liberté du maillage  $\mathcal{T}^k$ . Ces champs peuvent aussi s'écrire sous forme matricielle :

$$\overrightarrow{u_i(\vec{x})} = \underline{\underline{N_i}}(\vec{x}) \cdot \underline{\underline{U_i}} \quad (2.19)$$

de laquelle nous tirons les expressions de tenseurs de déformations linéarisés ( avec les notations classiques) :

$$\underline{\underline{\epsilon_i}}(\overrightarrow{u(\vec{x})}) = \underline{\underline{B_i}}(\vec{x}) \cdot \underline{\underline{U_i}} \quad (2.20)$$

L'approximation éléments finis du problème Arlequin (2.13) consiste à trouver  $(\underline{\underline{U_0}}, \underline{\underline{U_1}}, \underline{\underline{\Lambda}})$  solution du système linéaire :

$$\begin{bmatrix} \underline{\underline{K_0}} & \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{C_0^T}} \\ \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{K_1}} & \underline{\underline{-C_1^T}} \\ \underline{\underline{C_0}} & \underline{\underline{-C_1}} & \underline{\underline{0}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \underline{\underline{U_0}} \\ \underline{\underline{U_1}} \\ \underline{\underline{\Lambda}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{\underline{F_0}} \\ \underline{\underline{F_1}} \\ \underline{\underline{0}} \end{bmatrix} \quad (2.21)$$

où  $K_0, K_1$  sont les matrices de rigidité assemblées,  $C_0, C_1$  les matrices de couplage assemblées et  $F_0, F_1$  les vecteurs assemblés des efforts extérieurs. Ces différents termes sont définis comme suit :

$$\text{Pour } k \in (0, 1), \quad \underline{\underline{K_k}} = \int_{\Omega_k} \alpha_k \underline{\underline{B_k^T}} \underline{\underline{A_k}} \underline{\underline{B_k}} dv \quad (2.22)$$

$$\underline{\underline{C_k}} = \int_{\Omega_{1c}} \left\{ \underline{\underline{N_k^T}} \underline{\underline{N_c}} + l^2 \underline{\underline{B_k^T}} \underline{\underline{B_c}} \right\} dv \quad (2.23)$$

$$\underline{\underline{F_0}} = \int_{\Omega_0} \alpha_0 \underline{\underline{N_0^T}} \underline{\underline{f_0}} dv + \int_{\Gamma_T} \alpha_0 \underline{\underline{N_0^T}} \underline{\underline{T_0}} ds \quad (2.24)$$

$$\underline{\underline{F_1}} = \int_{\Omega_1} \alpha_1 \underline{\underline{N_1^T}} \underline{\underline{f_1}} dv \quad (2.25)$$

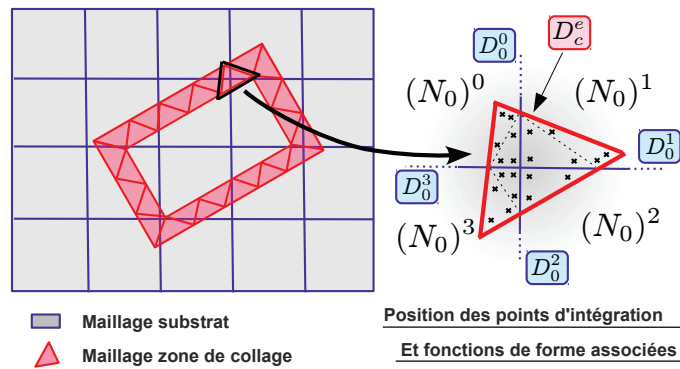
Comme expliqué précédemment, il y a trois champs nodaux qui interviennent dans le système matriciel de la formulation discrétisée,  $(\underline{\underline{U_0}}, \underline{\underline{U_1}}$  et  $\underline{\underline{\Lambda}})$ . Les modèles n'étant reliés que par l'intermédiaire des opérateurs de couplages définis sur le domaine intermédiaire (2.23), la méthode possède un découpage naturel. Ainsi, lors d'une simulation, il est possible de raisonner en deux étapes pour un problème bidomaine, tel celui considéré ici.

### 2.4.2 Stratégie d'évaluation des différents termes Arlequin

Un des atouts les plus intéressants de la méthode Arlequin est que le patch inséré peut posséder une discrétisation différente de celle du substrat et incompatible avec celle-ci. Afin de bénéficier pleinement de cet atout, on se place dans le cas le plus complexe où les maillages sont incompatibles. Sachant que quand les maillages sont compatibles, le calcul des termes de couplage et de rigidité est classique puisque l'on peut ramener le calcul de ces termes à des assemblages sur des éléments où les fonctions de base  $N_0$ ,  $N_1$  et  $N_c$  sont régulières.

Pour des maillages incompatibles, l'évaluation des termes de couplage (2.23) et de rigidité (2.22) est plus complexe. Ces évaluations s'effectuant sur le maillage intermédiaire  $\mathcal{T}^c$  dans notre mise en œuvre, elles nécessitent des techniques d'intégration adaptées puisque les fonctions de base  $N_0$  et  $N_1$  ne sont pas forcément régulières sur les éléments  $D_c^e$  du maillage intermédiaire. Le calcul de ces termes exige une règle d'intégration spécifique en coopération avec une procédure de localisation d'éléments.

Pour clarifier ces difficultés, considérons d'abord les termes de couplage :



**Figure 2.6** — Règle d'intégration adaptée pour l'opérateur de couplage du substrat avec discrétisations incompatibles entre modèles.

$$C_k = \int_{\Omega_{1c}} \{ N_c^T N_k + l^2 B_c^T B_k \} dv, \quad k = \{0, 1\} \quad (2.26)$$

En éléments finis, le calcul des termes  $C_k$  se fait par assemblage de calculs élémentaires. Même si l'on peut construire des situations plus complexes, imaginons le cas simplifié mais représentatif où le domaine intermédiaire  $\Omega_{1c}$  est formé par un ensemble d'éléments du maillage  $\mathcal{T}^1$ , restreint au domaine  $\Omega_{1c}$  et que cette restriction correspond au maillage intermédiaire  $\mathcal{T}^c$ . Dans cette configuration simplifiée, il est clair que le calcul de l'opérateur  $C_1$  peut se faire de manière tout à fait standard. En revanche, le calcul de l'opérateur  $C_0$  pose quelques difficultés en général. En effet, nous pouvons écrire que :

$$C_0 = \sum_{D_c^e \in \mathcal{T}^c} \int_{D_c^e} \{ N_c^T N_0 + l^2 B_c^T B_0 \} dv \quad (2.27)$$

Or, en considérant par exemple le cas représenté sur la figure (2.6), nous constatons clairement que les fonctions de base  $N_0$  ne sont pas régulières, en général, sur les éléments  $D_c^e$ .

Il est impossible de représenter correctement, par une fonction polynomiale, les champs des autres modèles sur le maillage  $\mathcal{T}^e$ . Par conséquent, les produits  $N_c^T N_0$  et  $B_c^T B_0$  ne sont pas réguliers sur  $D_c^e$ . Leurs intégrales sur  $D_c^e$  ne peuvent donc suivre des règles d'intégrations numériques standards (de type Gauss, par exemple).

L'évaluation précise de ces intégrales nécessite une procédure d'intégration élaborée. Une solution pour les évaluer correctement consiste à utiliser une règle d'intégration liée aux parties sous-découpées de chaque élément  $D_c^e$  en fonction de la triangulation  $\mathcal{T}^0$ . Cette méthode définit une règle d'intégration adaptée pour chaque élément  $D_c^e$ . Sur chaque élément  $D_c^e$ , afin que l'on puisse évaluer correctement les produits de l'opérateur de couplage, on détermine ensuite les fonctions de base  $N_0$  de l'élément contenant le point d'intégration (ces deux procédures sont expliquées en détails dans la partie suivante). Ainsi, en employant des formules de quadratures adaptées, on peut approcher les intégrales de l'opérateur de couplage (2.27) sur les éléments  $D_c^e$  :

$$C_0 = \sum_{D_c^e \in \mathcal{T}^e} \sum_{g \in D_c^e} \rho_g \{ (N_c(g))^T (N_0)^i(g) + l^2 (B_c(g))^T (B_0)^i(g) \} \quad (2.28)$$

où le couple  $(g, \rho_g)$  représente les coordonnées et les poids des points d'intégration associés à l'élément  $D_c^e$  défini par l'intersection avec la triangulation  $\mathcal{T}^0$ . La fonction de forme  $(N_0)^i$  est à relier à l'élément  $D_0^i$  appartenant à la discrétisation du modèle substrat. Sa détermination étant établie à partir des coordonnées du point  $g$  (cf figure droite 2.6). Dans nos travaux, l'emploi de la règle d'intégration spécifique nécessite de sauvegarder l'ensemble des coordonnées des points d'intégration et leurs poids associés  $(g, \rho_g)$ .

Considérons à présent l'évaluation des matrices de rigidités pondérées. Elles s'écrivent :

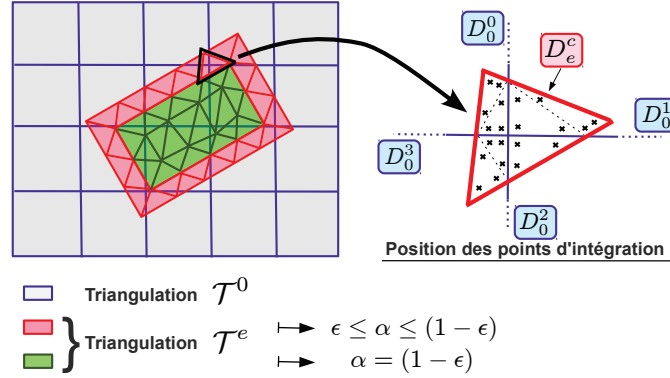


Figure 2.7 — Carte des coefficients de pondération et règle d'intégration pour l'évaluation des termes de rigidité.

$$K_k = \int_{\Omega_k} \alpha_k B_k^T A_k B_k dv, \quad k = \{0, 1\} \quad (2.29)$$

Pour ces termes et suivant notre choix de modélisation, l'incompatibilité des maillages est problématique aux niveaux des frontières du domaine de collage  $\Omega_{1c}$  qui traversent certains éléments du domaine substrat  $\Omega_0$  (cf frontières de l'ensemble des éléments rouges avec les éléments bleus sur la figure 2.7). L'évaluation des termes de rigidité étant plus complexe

pour le modèle substrat, la suite des explications est réalisée sur le terme  $K_0$ . Sur certains éléments de la triangulation  $\mathcal{T}^0$ , la fonction  $\alpha_0$  est hétérogène et ne peut être approchée par des fonctions polynomiales sur les éléments  $D_0^e$  (sauf fonctions de pondération régulières à l'aide de polynômes d'ordre élevé). Dans notre mise en œuvre, afin d'être le moins intrusif possible, nous n'avons pas cherché à évaluer l'énergie pondérée mais plutôt l'énergie qu'il est nécessaire de décompter aux énergies totales des modèles substrat et patch. Ainsi, l'expression du terme de rigidité du modèle substrat (2.29) écrite sous forme :

$$K_0 = \int_{\Omega_0} B_0^T A_0 B_0 dv - \int_{\Omega_0 \cap \Omega_1} (1 - \alpha_0) B_0^T A_0 B_0 dv \quad (2.30)$$

Par simplicité et suivant les relations des fonctions de pondération (2.11), on remplace la fonction  $(1 - \alpha_0)$  par  $\alpha$  dans la suite de nos explications. Par analogie, la fonction  $(1 - \alpha_1)$  devient  $(1 - \alpha)$ . Cette fonction  $\alpha$  est définie à partir de valeurs de pondération définie à chaque nœud du maillage intermédiaire. Dans cette configuration, la fonction  $\alpha$  permet d'indiquer l'énergie qu'il faut ôter pour qu'elle ne soit pas doublée dans la zone de superposition. Dans notre mise en œuvre, on évalue uniquement l'énergie à enlever  $K'_k$  sur les éléments du maillage intermédiaire :

$$K'_0 = - \sum_{D_c^e \in \mathcal{T}^c} \int_{D_c^e} \alpha B_0^T A_0 B_0 dv \quad (2.31)$$

Dans l'expression du terme de rigidité à enlever (2.31) et suivant la mise en œuvre choisie, la difficulté d'évaluation réside dans le fait que les fonctions de base  $N_0$  ne sont pas régulières sur certains éléments  $D_c^e$  de la triangulation  $\mathcal{T}^c$  (cf figure 2.7) alors que la fonction de pondération s'évalue simplement sur le maillage intermédiaire. Pour évaluer correctement l'intégrale d'énergie pondérée sur ces éléments  $D_c^e$ , on utilise la même méthode d'intégration qui consiste en un assemblage de calculs élémentaires où les fonctions de base  $N_0$  sont évaluées par rapport aux coordonnées de points d'intégration. Chaque élément  $D_c^e$  est sous-découpé suivant la triangulation  $\mathcal{T}^0$  afin de générer une règle d'intégration adaptée. À partir de ces éléments  $D_c^e$ , l'évaluation des intégrales (2.30) peut être approchée, avec les formules de quadratures adaptées, par :

$$K'_0 = - \sum_{D_c^e \in \mathcal{T}^c} \sum_{g \in D_c^e} \rho_g \{ \alpha(g) ((B_0)^i(g))^T A_0 (B_0)^i(g) \} \quad (2.32)$$

avec  $(g, \rho_g)$  qui représente les coordonnées et les poids associés des points d'intégration de la règle d'intégration adaptée sur la triangulation  $\mathcal{T}^c$ . Cette écriture nécessite d'avoir un maillage sur l'ensemble de la zone de superposition  $\Omega_1$  et pas uniquement sur la couronne employée pour le couplage  $\Omega_{1c}$ , néanmoins le maillage de la partie intérieure du domaine intermédiaire  $\Omega_{1f}$  n'a pas besoin d'être très raffinée, puisque qu'elle n'est utilisée que pour évaluer le terme de rigidité (2.31) là où la fonction de pondération est constante ( $\alpha = (1 - \epsilon)$  avec  $\epsilon > 0$  très faible). Pour évaluer les termes de rigidité (2.32), il suffit d'évaluer les coefficients  $\alpha$  à chaque point d'intégration puisque l'ensemble des coordonnées de ces points et leurs poids associés  $(g, \rho_g)$  sont déjà sauvegardés.

Pour les termes de rigidité, quelques particularités supplémentaires sont à noter dans

notre mise en œuvre. La première est que les fonctions de pondération peuvent être de différentes formes (cf figures 2.3). Si la fonction de pondération est régulière (linéaire ou d'ordre supérieur), l'évaluation du coefficient au point d'intégration  $\alpha(g)$  s'effectue en interpolant la valeur des coefficients calculés aux nœuds des éléments  $D_c^e$ . Mais lorsque les fonctions de pondération sont constantes, certains nœuds situés, sur la frontière du domaine  $\Omega_1$ , possèdent deux valeurs de coefficients. Dans ce cas, le coefficient est évalué par élément et non aux nœuds. Selon le type de fonction de pondération, la formulation du coefficient à un point d'intégration  $\alpha(g)$ , utilisé dans l'équation (2.32), est :

$$\left\| \begin{array}{ll} \alpha(g) = \sum_{i=1}^{n_c} (N_c^i(g)) \alpha^i & \text{si pondération continue} \\ \alpha(g) = \alpha_{cst} & \text{si pondération constante} \end{array} \right. \quad (2.33)$$

avec  $\alpha^i$  qui représente la valeur nodale du coefficient de pondération sur l'élément  $D_z^e$  et  $\alpha_{cst}$  la valeur du coefficient de pondération sur l'ensemble de l'élément  $D_z^e$ . La seconde particularité est que la pondération ne s'effectue que pour des énergies de même espèce.

L'évaluation des termes de couplage et de rigidité nécessite d'assembler les calculs réalisés sur les éléments  $D_c^e$ . Ces termes sont évalués avec une règle d'intégration adaptée issue de l'intersection entre le maillage intermédiaire et le maillage du modèle correspondant (le modèle substrat pour notre choix de modélisation). Ces évaluations exigent, ensuite, l'utilisation d'une procédure de repérage des éléments des modèles  $D_k^e$ ,  $k = \{0, 1\}$  intervenant dans les intégrales calculées sur les éléments  $D_c^e$  pour en déterminer les fonctions de base  $N_k$ . Le choix de mise en œuvre de ces deux procédures est détaillé dans la section suivante.

### Génération d'une règle d'intégration pour maillages éléments finis incompatibles et procédure de repérage

Pour la mise en œuvre de la méthode Arlequin, la plupart des travaux trouvés dans la littérature utilisent des zones de raccords compatibles ou des maillages qui s'emboîtent comme dans la méthode multigrille [99, 100]. En ce qui concerne les travaux dédiés à des modèles utilisant des maillages incompatibles [101, 16, 67]<sup>1</sup>, l'évaluation des termes de couplage et de rigidité s'opère à l'aide de la génération d'un maillage d'intersection entre les maillages des deux modèles à coupler. Dans [101, 16, 67], le maillage intermédiaire  $\mathcal{T}^c$  est remplacé par un maillage d'intersection  $\mathcal{T}^z$  créé à partir des deux maillages  $\mathcal{T}^0, \mathcal{T}^1$ . On utilise ensuite la règle d'intégration associée à ce maillage  $\mathcal{T}^z$  pour calculer les approximations des différents termes du système Arlequin. Dans nos travaux nous ne générons pas de maillage d'intersection mais uniquement la règle d'intégration associée aux éléments sous-découpés. L'emploi d'une telle règle d'intégration, pour évaluer les termes d'une formulation Arlequin, nécessite une procédure de production d'une règle d'intégration spécifique et une méthode rapide de localisation des éléments.

Ces techniques ont déjà fait l'objet d'explications dans [101, 16, 67]. Cependant, les procédures que nous avons mises en œuvre présentent des différences par rapport à celles développées dans [101, 16, 67]. Elles sont détaillées dans les deux sections qui suivent.

#### – Construction d'une règle d'intégration

---

1. Une méthode d'intégration adaptative est proposée dans [19]

La procédure crée une règle d'intégration afin d'évaluer correctement les intégrales comportant des fonctions de base issues de maillages incompatibles. Dans les précédents travaux [101, 67], l'évaluation correcte des intégrales est obtenue à partir d'un maillage d'intersection  $\mathcal{T}^z$ . Ce maillage qui remplace le maillage intermédiaire est calculé par un algorithme d'intersection des triangulations  $\mathcal{T}^0$  et  $\mathcal{T}^1$  (cf figure 2.8). Chacun de ces éléments sont redécoupés de façon à obtenir des éléments standards  $D_z^e$  dont on connaît la règle d'intégration. Ainsi, sur chaque élément de cette triangulation  $\mathcal{T}^z$ , on est capable d'intégrer correctement des fonctions issues des deux maillages ( $\mathcal{T}^0, \mathcal{T}^1$ ) puisque ces fonctions de base y sont régulières. Ce maillage d'intersection est défini tel que :

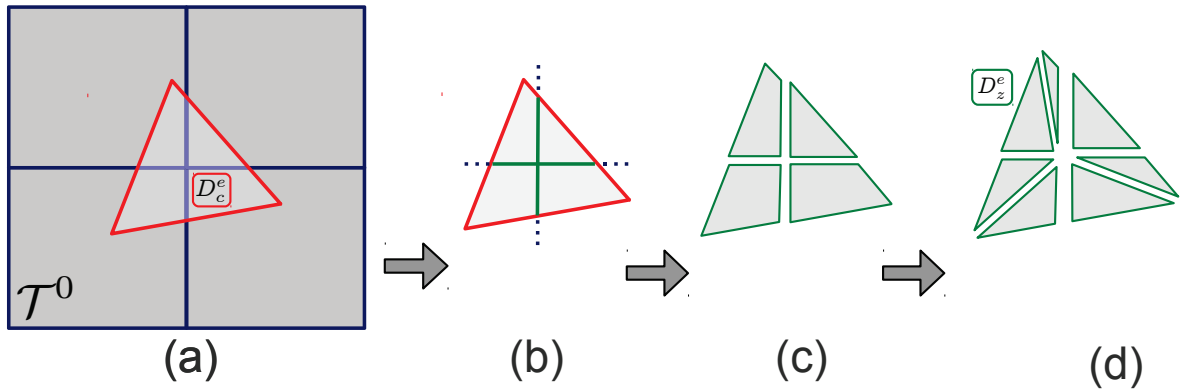


Figure 2.8 — Génération du maillage d'intersection.

$$\mathcal{T}^{\{0,1\}} = \mathcal{T}^z = \left\{ \sum_e D_z^e ; \exists D_0^e \in \mathcal{T}^0 \text{ et } D_1^e \in \mathcal{T}^1 ; D_z^e = D_0^e \cap D_1^e \right\} \quad (2.34)$$

où  $D_z^e$  représente un élément de la triangulation  $\mathcal{T}^z$ . La génération de ce maillage induit un coût supplémentaire de plus, il faut porter une attention particulière aux éléments allongés. Cependant, le recours à des méthodes multiéchelles, permettant de coupler des modèles non compatibles, est motivé par des simulations complexes pour lesquelles les coûts requis, afin de générer le maillage d'intersection, représentent une faible partie des coûts globaux. En outre, cette intersection n'est calculée que dans une partie réduite, correspondant à la zone de couplage  $\Omega_{1c}$ , du problème.

Dans notre mise en œuvre, il est choisi de ne pas générer de maillage d'intersection mais uniquement la règle d'intégration associée. Sur le maillage intermédiaire, cette règle est construite, élément par élément, en fonction du maillage du modèle à coupler. La règle complète revient à définir l'ensemble des coordonnées et les poids des points d'intégration des domaines  $D_c^e$  qui permettent d'intégrer les fonctions de base des autres triangulations. Les données des points d'intégration sont obtenues à l'aide d'un algorithme (cf annexe B) qui est capable de définir la règle d'intégration associée aux parties des éléments  $D_c^e$ . De façon succincte, cet algorithme procède en plusieurs étapes :

1. si deux éléments polygonaux s'intersectent, on commence par déterminer le sommet  $A$  de l'élément  $D_0^e$  qui se situe dans l'élément  $D_c^e$ . Dans le même temps, on



procède de la même manière pour le sommet  $B$  de l'élément  $D_c^e$  qui se situe dans l'élément  $D_0^e$ . Lorsque ces deux points sont déterminés, on peut définir les points d'intersection entre ces deux éléments (segment-segment ou segment-face). Ces points permettent de définir le volume commun aux deux éléments (cf figure 2.9.(a)).

2. à partir de tous ces points, on détermine l'enveloppe convexe  $D^p$  qui les contient (cf figure 2.9.(b)) à l'aide de la librairie (**Qhull**).
3. on triangule alors ce domaine en triangle (2D) ou tétraèdres (3D) et on crée la règle d'intégration associée à l'ordre voulu sur chacun des sous-éléments  $D_z^e$  (cf figure 2.9.(c)). Les coordonnées et les poids de ces points sont ensuite sauvegardés.

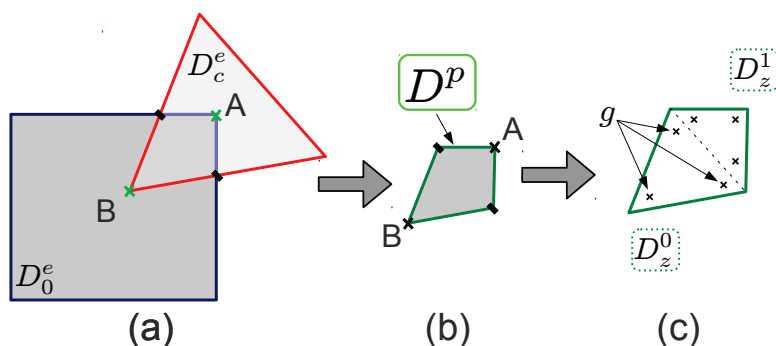


Figure 2.9 — Définition d'un domaine  $D^p$  d'intersection entre un élément  $D_0^e$  et  $D_c^e$  en 2D.

Cette triangulation locale s'effectue élément par élément et contrairement aux précédents travaux, on ne génère pas de maillage global sur le domaine intermédiaire. En terme de performance, on vérifie que l'on intègre avec une très bonne précision puisque l'erreur relative mesurée est de l'ordre de  $10^{-10}$ , montrant ainsi que les problèmes d'arrondis numériques, qui se produisent massivement lors de ce type d'opérations, n'ont pratiquement aucune influence sur la qualité de la règle d'intégration fournie. Les détails d'implémentation ainsi que les coûts nécessaires à la construction et l'utilisation de cet algorithme sont exposés dans l'annexe (A).

#### – Localisation des éléments superposés

L'évaluation des intégrales est maintenant effectuée correctement. Cependant, localiser rapidement l'élément d'une triangulation qui contient un point particulier est une opération essentielle dans l'évaluation rapide des intégrales faisant intervenir des fonctions de base issues de maillages différents. Cette opération de localisation est effectuée par une méthode de tri des éléments, dite arbre, basée sur des classifications binaires qui répartissent l'ensemble des éléments d'une triangulation en un nombre fini d'étapes, nommées branchements. Afin d'en simplifier la répartition, chaque élément à classer est englobé dans une boîte. Les côtés de la boîte sont établis par des plans perpendiculaires aux directions principales  $(x, y, z)$ . La boîte est construite avec des plans en  $x_{min}$  et  $x_{max}$  ainsi que  $y_{min}$ ,  $y_{max}$ ,  $z_{min}$  et  $z_{max}$ . Chaque boîte peut être simplement déterminée à partir de deux points : le coin minimal qui est déterminé par les plus faibles coordonnées  $(x_{min}, y_{min}, z_{min})$  et le coin maximal qui possède les plus grandes



coordonnées  $(x_{max}, y_{max}, z_{max})$  (cf figure 2.10). La manière de construire ces boîtes limite le type d'élément utilisable à ceux aux côtés définis par des segments droits ou des surfaces planes.

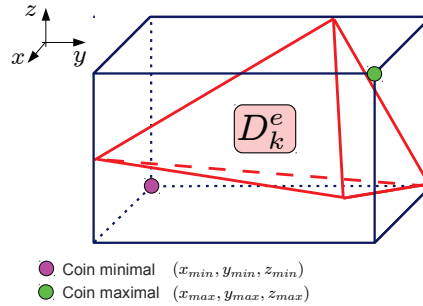


Figure 2.10 — Construction d'une boîte englobant un élément.

Dans l'arbre, les feuilles représentent ces boîtes auxquelles on accède suite à plusieurs embranchements à deux choix (cf figure 2.11). Chaque embranchement représente la division, par un hyperplan séparateur, d'un ensemble fini de boîtes. En formant deux groupes de boîtes à chaque embranchement, il est possible de répartir rapidement l'ensemble de ces boîtes en un faible nombre de divisions. Dans notre mise en œuvre, les hyperplans sont choisis perpendiculairement aux directions principales et placés de façon à avoir autant de boîtes de chaque côté à chaque embranchement. Ces hyperplans sont définis, en boucle, selon l'axe  $x$  puis  $y$  puis  $z$  jusqu'à ce qu'il n'y ait plus qu'une boîte dans chaque embranchement. Ce type d'arbre permet de trouver en quelques étapes une liste de boîtes pouvant contenir un point donné. Dans cette liste réduite de boîtes sélectionnées, il devient rapide de trouver à quel élément appartient le point.

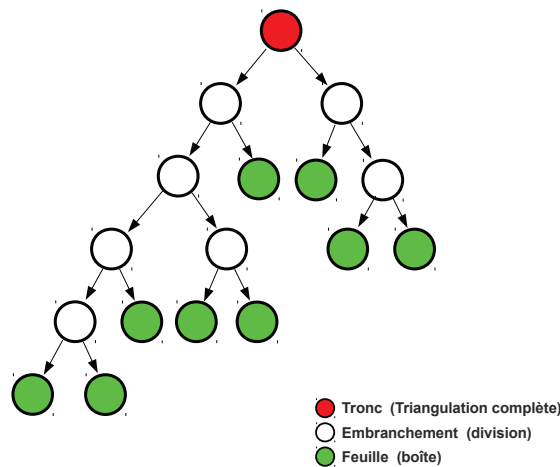


Figure 2.11 — Arbre de répartition des boîtes.

En pratique, pour trouver la liste des boîtes, on procède de manière récursive. C'est à dire que l'on commence par chercher une première boîte pouvant contenir le point. De cette feuille, on remonte successivement à l'embranchement précédemment traversé

puis on teste le deuxième choix, etc, jusqu'à trouver une seconde feuille, représentant une boîte. Une telle procédure a un coût de construction en  $\mathcal{O}(n \cdot \log_2(n))$  opérations pour un nombre de  $n$  boîtes. Cependant, la recherche de la liste des boîtes contenant le point n'est que de  $\mathcal{O}(\log_2(n))$  opérations.

L'algorithme réalisé, durant nos travaux, est un peu différent de ceux utilisés dans les travaux précédents pour construire l'arbre de répartition des boîtes. Ces différences concernent le mode de construction des boîtes englobant les éléments ainsi que le choix des hyperplans séparateurs. Pour bien comprendre les spécificités de notre mise en œuvre, on résume brièvement les arbres de tri développés dans les autres travaux liés aux maillages incompatibles :

- pour G. Rateau [101], les éléments sont aussi approchés par des boîtes. Cependant, la construction des boîtes est établie à partir des normales issues des côtés ou des faces. La construction des boîtes est plus complexe mais permet d'englober des éléments courbes. Le tri à chaque embranchement s'effectue par des hyperplans séparateurs établis selon les plans des boîtes et sélectionnés par un critère d'équilibrage et un critère de redondance. Ce critère de redondance s'explique par le fait qu'à chaque embranchement les boîtes sont réparties en deux ensembles avec, pour le cas particulier des boîtes intersectant le plan séparateur, une duplication de ces boîtes dans les deux ensembles. Ce critère permet de sélectionner l'hyperplan séparateur qui limite le nombre de boîtes à dupliquer. La construction de cet arbre est arrêtée lorsque la division d'un embranchement est constituée d'un nombre assez faible de boîtes.
- pour O. Jamond [67], les éléments sont représentés par leurs centres. La répartition de ces points s'effectue par des hyperplans établis perpendiculairement aux directions principales  $(x, y, z)$ . Cependant, pour chaque embranchement, on sélectionne l'hyperplan qui offre la meilleure répartition qui s'effectue au sens strict, sans élément dupliqué. À chaque embranchement, on emboîte l'ensemble des éléments de chaque division afin d'accélérer le parcours de l'arbre, lors de la recherche de l'appartenance d'un point. Ces boîtes sont définies à partir de plans perpendiculaires aux directions principales  $(x, y, z)$  encadrant tous les éléments d'une division.

L'arbre binaire, qui est établi dans notre étude, comporte certaines divergences. Contrairement aux deux autres arbres, on se limite aux éléments à faces planes (en 3D) englobés dans des boîtes qui facilitent le tri. Ce tri s'effectue au sens strict à partir du coin minimal de chaque boîte et, après chaque embranchement, l'enveloppe des boîtes d'une division est agrandie en fonction des coins maximaux des boîtes afin de corriger l'espace occupé pour plus de précision. Le choix des hyperplans séparateurs s'effectue très simplement, dans notre mise en œuvre, limitant le coût de calcul. Néanmoins, la sélection des hyperplans n'est pas forcément optimisée comme dans les deux autres arbres. L'arbre qui a été mis en place, dans nos travaux, présente l'avantage d'être rapide et robuste tout en étant adapté à nos caractéristiques de modélisation.

Ces deux procédures permettent d'évaluer correctement et rapidement les intégrales utilisant des fonctions de formes provenant des maillages des modèles (substrat, patch et intermédiaire) sur les éléments du maillage d'intersection. La procédure de détermination des points

d'intégration permet d'effectuer une évaluation adaptée sur les éléments  $D_c^e$ , malgré les irrégularités de fonctions de base issues des autres triangulations  $\mathcal{T}^0$  et  $\mathcal{T}^1$  sur ces éléments. Ces intégrales élémentaires sont évaluées sur le maillage intermédiaire  $\mathcal{T}^c$  en déterminant les fonctions de base de l'élément  $D_0^e$  contenant le point d'intégration  $g$ . Ces deux procédures sont principalement employées pour les termes liés au modèle substrat puisque, dans notre choix de modélisation, le maillage intermédiaire est une restriction de la triangulation du patch dans la zone de collage.

### 2.4.3 Écriture du problème sur le maillage intermédiaire

Maintenant que tous les termes de la méthode peuvent être correctement évalués, la formulation matricielle (2.21) ne pose plus de complication pour le cas de maillages incompatibles. Dans notre mise en œuvre, nous décidons de raisonner au niveau du domaine intermédiaire. L'utilisation de la méthode Arlequin consiste à déterminer les termes, affectant chaque modèle, évalués sur le maillage intermédiaire. Cela permet, en outre, d'être non intrusif sur les modèles substrat et patch puisque les termes du système Arlequin ne sont écrits que sur le maillage intermédiaire. Par simplicité, la suite de nos explications est définie sur un problème avec deux modèles.

Suivant notre stratégie d'application de la méthode Arlequin, on se donne pour consigne que la mise en œuvre demeure la moins intrusive possible. Ainsi, notre implémentation peut s'appliquer sur un problème de deux modèles non couplés, dont les expressions sont, sur les domaines concernés :

$$\begin{cases} K_0 \cdot U_0 = F_0 \\ K_1 \cdot U_1 = F_1 \end{cases} \quad (2.35)$$

avec pour définition des différents termes :

$$K_k = \int_{\Omega_k} B_k A_k B_k dv, \quad k = \{0, 1\} \quad (2.36)$$

$$F_0 = \int_{\Omega_0} N_0 f_0 dv + \int_{\Gamma_T} N_0 T_0 ds \quad (2.37)$$

$$F_1 = \int_{\Omega_1} N_1 f_1 dv \quad (2.38)$$

Afin d'obtenir un système Arlequin (2.21), on évalue les matrices de correction des énergies des modèles ( $K'_k, F'_k$  avec  $k = \{0, 1\}$ ) ainsi que les matrices de couplage ( $C_k$ ) sur le domaine intermédiaire. À partir des informations issues des modèles substrat et patch, ce système Arlequin s'écrit :

$$\begin{bmatrix} K'_0 & 0 & C_0^T \\ 0 & K'_1 & -C_1^T \\ C_0 & -C_1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U_0 \\ U_1 \\ \Lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F'_0 \\ F'_1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.39)$$

où les différents termes sont définis tels que :

$$K'_0 = - \int_{\Omega_1} \alpha B_0 A_0 B_0 dv \quad (2.40)$$

$$K'_1 = - \int_{\Omega_1} (1 - \alpha) B_1 A_1 B_1 dv \quad (2.41)$$

$$C_k = \int_{\Omega_{1c}} N_c N_k + l^2 B_c B_k dv, \quad k = \{0, 1\} \quad (2.42)$$

$$F'_0 = - \int_{\Omega_1} \alpha N_0 f_0 dv \quad (2.43)$$

$$F'_1 = - \int_{\Omega_1} (1 - \alpha) N_1 f_1 dv \quad (2.44)$$

L'assemblage de ce système matriciel (2.39) aux systèmes des modèles non couplés (2.35) permet d'obtenir le système Arlequin intégral (2.21) écrit sur le domaine complet. Cette mise en œuvre permet d'obtenir un problème Arlequin grâce aux matrices (2.39), définies sur les éléments du maillage intermédiaire  $D_c^e$ , qui sont calculées avec les fonctions de base des modèles  $N_0$  et  $N_1$ . Dans la pratique, ce système matriciel est construit en deux étapes qui correspondent au couplage avec chaque modèle. Ainsi, ce système (2.39) est séparé en fonction de chaque modèle ( substrat et patch ) ;

$$\begin{bmatrix} K'_0 & C_0^T \\ C_0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U_0 \\ \Lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F'_0 \\ R_\Lambda \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} K'_1 & -C_1^T \\ -C_1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U_1 \\ \Lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F'_1 \\ -R_\Lambda \end{bmatrix} \quad (2.45)$$

Le terme  $R_\Lambda$  désigne les réactions dues aux multiplicateurs de Lagrange  $\Lambda$ . Pour la résolution séquentielle, ces réactions n'ont cependant pas besoin d'être évaluées puisqu'elles sont opposées et leur somme est nulle.

Cette stratégie d'application permet d'employer simplement le couplage Arlequin pour les cas de modélisations incompatibles ou des modélisations multi-patches. Dans le cas d'un problème possédant plusieurs patches (*nb* patches), on peut trouver deux types de configurations : une modélisation avec plusieurs patches sur le même niveau (cf figure 2.12) ou une modélisation avec un emboîtement de patches (cf figure 2.13).

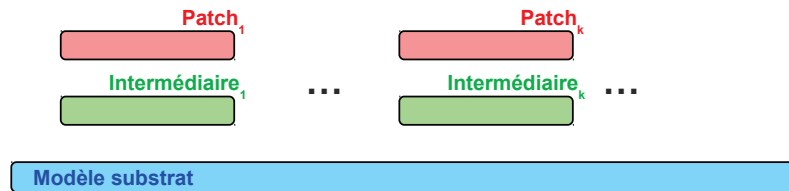


Figure 2.12 — Schéma explicatif de la modélisation d'un couplage avec plusieurs patches sur un seul niveau.

Pour la modélisation multi-patches sur un seul niveau (cf figure 2.12), les patches sont tous reliés à un unique modèle substrat. Un choix d'écriture consiste à réunir les matrices du domaine intermédiaire composées du rassemblement de tous les maillages intermédiaires

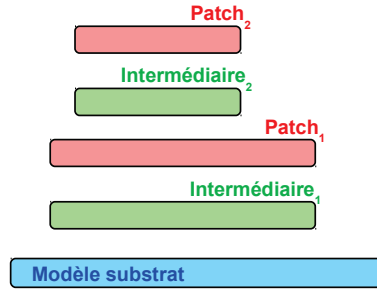


Figure 2.13 — Schéma explicatif de la modélisation d'un emboîtement de patches.

relatifs à chaque patch. Pour le lien avec le modèle substrat, le système écrit sur le domaine intermédiaire total est :

$$\begin{bmatrix} \sum_k^{mb} (K'_0)_k & \dots & (C_0^T)_k & \dots \\ \dots & 0 & 0 & \dots \\ (C_0)_k & & 0 & \\ \dots & & & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U_0 \\ \dots \\ (\Lambda)_k \\ \dots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_k^{mb} (F'_0) \\ \dots \\ (R_\Lambda)_k \\ \dots \end{bmatrix} \quad (2.46)$$

A contrario, pour chaque patch, il est nécessaire d'évaluer chaque système matriciel écrit sur le maillage intermédiaire associé. Ainsi, ces systèmes s'écrivent :

Pour les  $k$  modèles intermédiaires ( $1 \leq k \leq nb$ )

$$\overbrace{\left[ \begin{bmatrix} (K'_1) & (-C_1^T) \\ (-C_1) & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U_1 \\ \Lambda_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (F'_1) \\ -(R_\Lambda)_1 \end{bmatrix} \quad \dots \quad \begin{bmatrix} (K'_k) & -(C_k^T) \\ -(C_k) & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U_0 \\ \Lambda_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (F'_k) \\ -(R_\Lambda)_k \end{bmatrix} \right]} \quad (2.47)$$

où  $(K'_k)$ ,  $(C_k^T)$  et  $(F'_k)$  désignent les termes de rigidité pondérés, les termes de couplage et les termes d'efforts pondérés relatifs au  $k^{\text{ème}}$  patch. En ce qui concerne la modélisation de patches emboîtés où un second patch est contenu dans un premier patch (cf figure 2.13), l'écriture des systèmes suit la logique de deux systèmes matriciels associés à chaque maillage intermédiaire.

Pour les deux modèles intermédiaires reliant le patch (1) au modèle substrat(0) et au second patch(2)

$$\overbrace{\left[ \begin{bmatrix} (K'_1)_0 & (-C_1^T)_0 \\ (-C_1)_0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U_1 \\ \Lambda_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (F'_1)_0 \\ -(R_\Lambda)_0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} (K'_1)_2 & -(C_1^T)_2 \\ -(C_1)_2 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U_1 \\ \Lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (F'_1)_2 \\ -(R_\Lambda)_2 \end{bmatrix} \right]} \quad (2.48)$$

L'avantage de cette mise en œuvre est qu'elle rapproche les systèmes matriciels des maillages intermédiaires de ceux issus de méthodes de décomposition de domaine classiques pour la résolution sur des machines parallèles.

#### 2.4.4 Aspects techniques liés à l'opérateur de couplage énergétique

Dans les différents travaux dédiés à la méthode Arlequin, l'opérateur de couplage  $C$  (2.12) a été décliné de plusieurs manières :

- le raccord de type  $\mathcal{L}^2$ , où seuls les termes liés aux fonctions de forme sont conservés dans la formulation. Ce raccord n'utilise qu'un paramètre  $K_{L^2}$ , dit coefficient, qui permet d'influencer le conditionnement de la matrice globale (2.49).
- le raccord de type  $\mathcal{H}^1$ , qui définit la formulation standard Arlequin pour un problème bien posé. Cet opérateur requiert un paramètre supplémentaire de longueur caractéristique  $l$  permettant à l'opérateur d'être homogène (2.50) en plus du coefficient  $K_{H^1}$ .
- le raccord de type énergétique qui est similaire à un terme de rigidité (2.51). Il s'agit de l'opérateur de couplage  $\mathcal{H}^1$  privé du terme  $\mathcal{L}^2$ . Il n'y a qu'un paramètre  $K_E$ , choisi équivalent à un module de rigidité, pour que cet opérateur soit homogène à un terme de raideur. Ce couplage ne transmettant pas les modes rigides, une opération supplémentaire est nécessaire pour son utilisation.

$$\underline{\underline{C}}_{L^2}(\vec{x}) = K_{L^2} \int_{\Omega_{1c}} \underline{\underline{N}}_c^T(\vec{x}) \underline{\underline{N}}_k(\vec{x}) dv \quad (2.49)$$

$$\underline{\underline{C}}_{H^1}(\vec{x}) = K_{H^1} \int_{\Omega_{1c}} \{ \underline{\underline{N}}_c^T(\vec{x}) \underline{\underline{N}}_k(\vec{x}) + l^2 \underline{\underline{B}}_c^T(\vec{x}) \underline{\underline{B}}_k(\vec{x}) \} dv \quad (2.50)$$

$$\underline{\underline{C}}_E(\vec{x}) = K_E \int_{\Omega_{1c}} \underline{\underline{B}}_c^T(\vec{x}) \underline{\underline{B}}_k(\vec{x}) dv \quad (2.51)$$

Ce dernier opérateur de couplage (2.51), proposé dans les travaux de thèse de N. Elkhodja [15, 37] avait été testé uniquement dans le cadre d'interfaces hiérarchiquement compatibles. Cet opérateur présente l'avantage d'avoir une écriture similaire à un opérateur de rigidité lorsque le paramètre  $K_E$  est analogue à un tenseur de raideur. Du fait que l'opérateur s'écrive sur une interface volumique, trouver le bon coefficient  $K_E$  permet d'optimiser le conditionnement de la matrice du système complet (2.21).

Malgré les avantages qu'apporte l'opérateur énergétique  $C_E$ , il ne peut pas être employé sans une mise en œuvre spécifique. En effet, cet opérateur (2.51) ne transmet pas les mouvements de corps rigides. Il est donc nécessaire de le modifier pour que le modèle, ne possédant pas assez de conditions de Dirichlet, ne soit pas flottant. La stratégie détaillée dans la suite consiste à rajouter une couronne supplémentaire  $\Omega^*$  à la frontière de la zone de collage  $\Omega_{1c}$  (cf figure 2.14) dont on ne conserve que les contributions qu'elle apporte sur les termes de couplage de la frontière  $\partial\Omega_{1c}$  en imposant des conditions de Dirichlet sur le bord libre extérieur de la couronne noté  $\partial_{ext}\Omega^*$ .

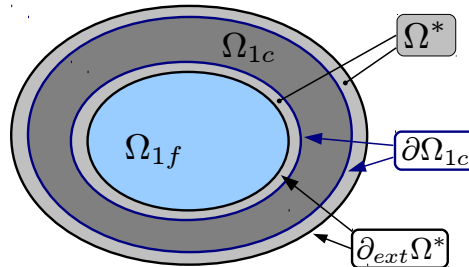


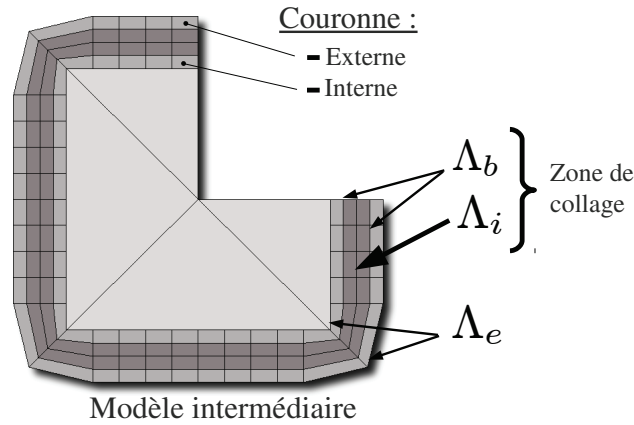
Figure 2.14 — Division du domaine intermédiaire avec couronnes.

La non transmission des modes rigides se traduit par un noyau non nul de l'opérateur de couplage ( $Ker(C_E) \neq \{0\}$ ), puisqu'il est construit exactement comme un opérateur de

rigidité mécanique sans condition de Dirichlet. Afin d'obtenir un opérateur modifié pouvant être inversé et qui transmette des modes rigides, F.X. Roux, N. Elkhodja et H. BenDhia [15] proposent d'ajouter une couronne intérieure et/ou extérieure  $\Omega^*$  à la frontière de la zone de collage  $\partial\Omega_{1c}$  (cf figure 2.14). L'opérateur de couplage s'écrit alors :

$$c(\vec{\lambda}, \llbracket \vec{u} \rrbracket) = K_E \int_{\Omega_{1c} \cup \Omega^*} \underline{\underline{\epsilon}}(\vec{\lambda}) : \underline{\underline{\epsilon}}(\llbracket \vec{u} \rrbracket) dv, \quad \begin{aligned} \forall \vec{\lambda} &\in (\mathcal{H}^1(\Omega_{1c} \cup \Omega^*)) \\ \vec{\lambda} &= \vec{0} \text{ sur } \partial_{ext}\Omega^* \end{aligned} \quad (2.52)$$

D'un point de vue formulation éléments finis, cette zone est composée d'une couronne intérieure et/ou extérieure d'un élément d'épaisseur d'ordre 1 (cf figure 2.15). On utilise les contributions sur les termes de collages de la frontière  $\partial\Omega_{1c}$ , apportées par cette couronne. Pour expliquer l'utilité de cette couronne, séparons les inconnues nodales entre celles associées aux inconnues internes de couplage habituelles  $\Lambda_i$ , celles associées aux inconnues  $\Lambda_b$  relatives aux frontières extérieures  $\partial\Omega_{1c}$  et celles  $\Lambda_e$  relatives aux frontières externes des couronnes  $\partial_{ext}\Omega^*$  (cf figure 2.15).



**Figure 2.15** — Intégration des couronnes intérieure et extérieure sur le maillage intermédiaire.

Dans ces conditions, il est possible d'obtenir une matrice de couplage  $C_E^\diamond$  pour le domaine  $\Omega_{1c}$  qui peut se décomposer en fonction des variables internes  $\Lambda_i$  et des variables de bords  $\Lambda_b$  liées aux nœuds des frontières  $\partial\Omega_{1c}$ , écrivons :

$$C_E^\diamond \begin{pmatrix} \Lambda_i \\ \Lambda_b \end{pmatrix} \quad \text{tel que} \quad C_E^\diamond = \begin{bmatrix} C_{ii}^\diamond & C_{ib}^\diamond \\ C_{bi}^\diamond & C_{bb}^\diamond \end{bmatrix} \quad (2.53)$$

Les dimensions de cette matrice  $C_E^\diamond$  étant basées sur le nombre de degrés de liberté  $n^c$  du domaine  $\Omega_{1c}$ .  $n^c$  étant la somme de l'ensemble  $n^i$  des degrés de libertés internes  $\Lambda_i$  et de la somme  $n^b$  des degrés de libertés de frontières  $\Lambda_b$ . Sur le domaine des couronnes  $\Omega^*$ , la matrice de couplage  $C_E^*$  est décomposée en fonction des variables  $\Lambda_b$  et  $\Lambda_e$ , en écrivant :

$$C_E^* \begin{pmatrix} \Lambda_b \\ \Lambda_e \end{pmatrix} \quad \text{tel que} \quad C_E^* = \begin{bmatrix} C_{bb}^* & C_{be}^* \\ C_{eb}^* & C_{ee}^* \end{bmatrix} \quad (2.54)$$

Les dimensions de la matrice  $C_E^*$  étant liées à la somme des degrés de libertés  $n^*$  des domaines couronnes  $\Omega^*$ . Ce nombre  $n^*$  est l'addition des  $n^b$  et de la somme des degrés de liberté  $n^e$  des frontières  $\partial_{ext}\Omega^*$ . Ces deux matrices ne sont toujours pas inversibles ( $Ker(C_E^\diamond) \neq \{0\}$  et  $Ker(C_E^*) \neq \{0\}$ ). La matrice de l'opérateur de couplage écrite sur la zone complète ( $\Omega_{1c} \cup \Omega^*$ ) est construite par l'assemblage des deux matrices  $C_E^\diamond$  (2.53) et  $C_E^*$  (2.54) de sorte que :

$$C_E^\Delta = \begin{bmatrix} C_{ii}^\diamond & C_{ib}^\diamond & 0 \\ C_{bi}^\diamond & C_{bb}^\diamond + C_{bb}^* & C_{be}^* \\ 0 & C_{eb}^* & C_{ee}^* \end{bmatrix} \quad (2.55)$$

La matrice du domaine de collage complet n'est toujours pas inversible, cependant on constate que le bloc relatif aux variables  $\Lambda_i, \Lambda_b$  est inversible dans cette configuration. En effet, la contribution liée aux interactions d'interfaces entre  $\Omega_{1c}$  et  $\Omega^*$  assure cette propriété si l'interface  $\partial\Omega_{1c}$  est suffisamment grande. Ainsi, le but de ces couronnes n'est pas d'augmenter le nombre de degrés de liberté ou la taille de la zone de couplage, mais d'utiliser les réactions de cette couronne afin de contraindre les mouvements de corps rigides de la zone de collage. Pour que le problème complet soit correctement posé, on utilise un opérateur de trace qui permet de restreindre la matrice  $C_E^\Delta$  (2.55) au bloc inversible  $[\Lambda_i, \Lambda_b]$  qui est modifié par les réactions issues des couronnes  $\Omega^*$  par le terme  $C_{bb}^*$ .

$$\underline{T} = \begin{bmatrix} I_{n^c} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{n^i} & 0 \\ 0 & I_{n^b} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.56)$$

L'opérateur de couplage  $C_E^\Delta$  (2.55) peut être réduit à la matrice bloc  $[\Lambda_i, \Lambda_b]$ , de sorte que l'on définisse le nouvel opérateur de couplage  $C_E$  (2.57) par :

$$\underline{\underline{C}}_E = \underline{\underline{T}}^T C_E^\Delta \underline{\underline{T}} = \begin{bmatrix} C_{ii}^\diamond & C_{ib}^\diamond \\ C_{bi}^\diamond & C_{bb}^\diamond + C_{bb}^* \end{bmatrix} \quad (2.57)$$

En pratique, on ajoute des conditions de Dirichlet sur la frontière des couronnes ( $\Lambda_e = 0$  sur  $\partial_{ext}\Omega^*$ ) pour que le problème soit bien posé. Le terme de couplage ainsi défini est inversible avec un noyau nul ( $Ker(C_E) = \{0\}$ ). Cette inversibilité étant assurée par les termes relatifs aux efforts apportés par la présence de couronnes intérieure et/ou extérieure.

Notons que l'application de l'opérateur de trace  $T$  nécessite cependant que les variables de l'opérateur énergétique  $C_E^\Delta$  soient toutes évaluées sur le maillage intermédiaire  $\mathcal{T}^c$ . Ainsi, l'opérateur de couplage énergétique doit être défini ;

$$C_E^\Delta = K \int_{\Omega_{1c} \cup \Omega^*} B_c^T B_c dv \quad (2.58)$$

avec les variables des domaines sous-jacents projetées sur le domaine intermédiaire. La stratégie employée pour ce transfert nécessite d'utiliser un opérateur de projection global de champs  $\Pi_k = \Pi_{k \rightarrow c}$  ( $k = \{0, 1\}$ ) pour que l'opérateur de couplage puisse être défini avec les



variables des domaines  $\Omega_k$ . Cette projection de variables  $e$  du domaine  $\Omega_k$  sur le domaine intermédiaire  $\Omega_c$  peut s'écrire :

$$e_\lambda = \Pi_k e_k \quad (2.59)$$

On propose d'utiliser un opérateur de projection  $\mathcal{L}^2$  qui assure la propriété suivante<sup>2</sup> :

$$\int_{\Omega_{1c} \cup \Omega^*} N_c^T N_c e_\lambda dv = \int_{\Omega_{1c} \cup \Omega^*} N_c^T N_k e_k dv \quad (2.60)$$

$$\text{Soit } \Pi_k = \left[ \int_{\Omega_{1c} \cup \Omega^*} N_c^T N_c dv \right]^{-1} \left[ \int_{\Omega_{1c} \cup \Omega^*} N_c^T N_k dv \right] \quad (2.61)$$

De plus amples explications concernant l'opérateur de projection  $\Pi_k$  sont données dans l'annexe (A).

Pour le raccord de type énergétique, l'écriture matricielle des systèmes élémentaires du domaine intermédiaire (2.45) avec les opérateurs de couplage projetés pour chaque modèle s'écrivent :

$$\begin{bmatrix} K'_0 & \Pi_0^T C_E^T \\ C_E \Pi_0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K'_0 & \Pi_0^T (T C_E^{\Delta T} T^T) \\ (T^T C_E^{\Delta T} T) \Pi_0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.62)$$

$$\begin{bmatrix} K'_1 & -\Pi_1^T C_E^T \\ -C_E \Pi_1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K'_1 & -\Pi_1^T (T C_E^{\Delta T} T^T) \\ -(T^T C_E^{\Delta T} T) \Pi_1 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.63)$$

La formulation des systèmes élémentaires Arlequin telle que nous l'avons proposée, nécessite que l'opérateur de collage  $C_E^{\Delta}$  soit exprimé sur le maillage intermédiaire, afin d'être en mesure d'appliquer l'opérateur de trace (2.62, 2.63), modifiant la matrice complète (2.39) avec des matrices de projection (2.61) et des matrices de couplage définies sur le domaine intermédiaire (2.58). Le système Arlequin sur le domaine intermédiaire peut ainsi s'écrire :

$$\begin{bmatrix} K'_0 & 0 & \Pi_0^T C^T \\ 0 & K'_1 & -\Pi_1^T C^T \\ C \Pi_0 & -C \Pi_1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U_0 \\ U_1 \\ \Lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F'_0 \\ F'_1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.64)$$

## 2.4.5 Stratégie de modélisation

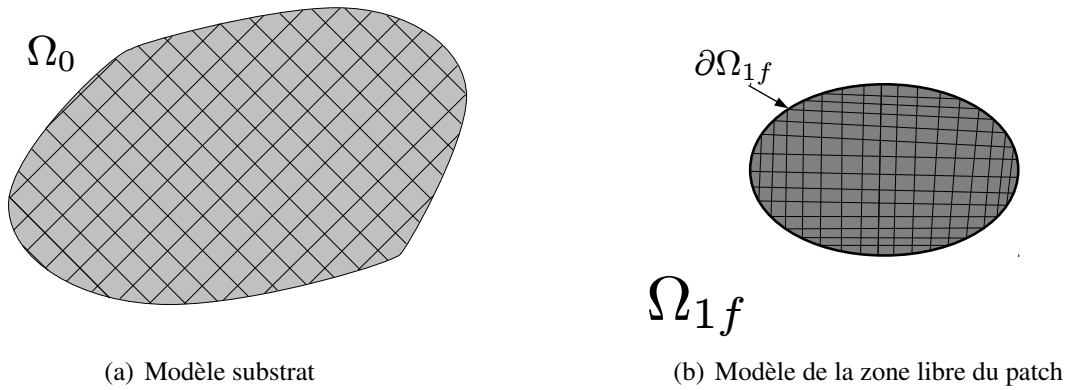
Pour la mise en place, réalisée dans ces travaux, d'une modélisation d'un problème Arlequin, nous adoptons un point de vue de modélisateur. Supposons que le modèle substrat, avec son maillage  $\mathcal{T}^0$ , soit une donnée qui ne doit pas être modifiée. Le modélisateur, voulant enrichir ce modèle par le biais de la méthode Arlequin, aura simplement à rajouter un détail géométrique (un perçage, une fissure, ...) ou un comportement spécifique (plasticité, endommagement, ...) dans une partie d'intérêt et limitée de la structure. Cet enrichissement est

2. On peut remarquer que ce type de transfert est équivalent à l'écriture d'un opérateur de collage Arlequin  $\mathcal{L}^2$  (2.49)

défini sur un patch possédant son maillage. Remarquons que nous pouvons même imaginer que ce patch provient d'une banque de modèles paramétrisés.

Pour appliquer la méthode Arlequin sur un modèle substrat, nous considérons le cas où le modèle de la zone libre du patch  $\Omega_{1f}$  (ou zone d'intérêt) est une donnée qu'il est juste nécessaire d'adapter pour compléter le patch. Afin de répondre à une utilisation industrielle, nous ne faisons aucune hypothèse sur la compatibilité du maillage du patch, autant en volume qu'en frontières, avec le maillage du modèle substrat.

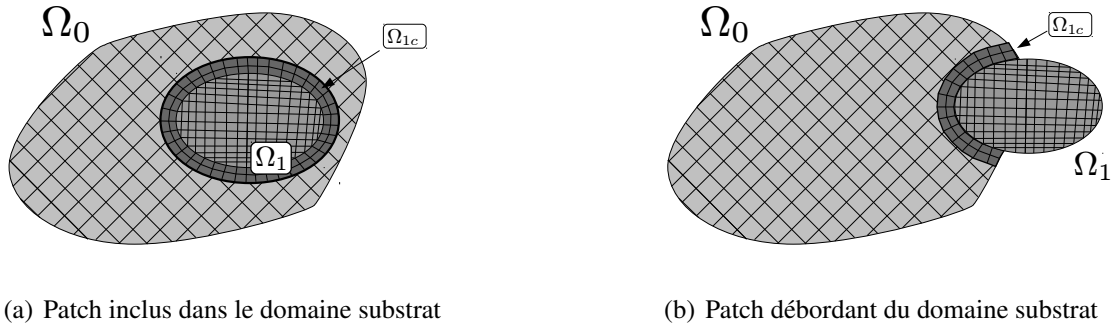
Dans nos travaux, un outil de construction de maillage est développé pour aboutir plus simplement à un problème Arlequin. Cet outil de construction procède en deux étapes. La première étape agit sur le modèle patch et la seconde définit le maillage intermédiaire.



**Figure 2.16** — Modèle substrat et modèle libre du patch donnés initialement.

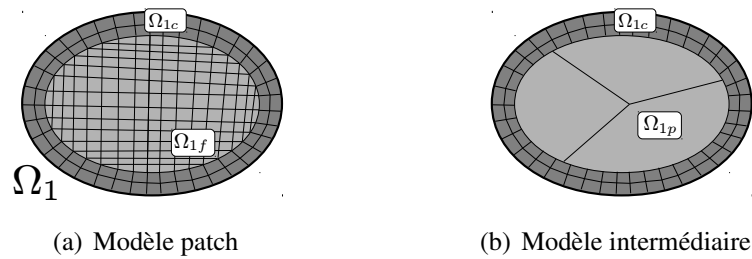
Comme indiqué, le modèle substrat est une donnée initiale qui n'est pas modifiée (cf figure 2.16(a)). La partie libre du patch  $\Omega_{1f}$  est une création nouvelle (cf figure 2.16(b)) que l'utilisateur propose pour simuler un comportement local dont la complexité n'est pas accessible au modèle global. Ce modèle secondaire est défini de dimensions suffisantes pour capter la complexité de la zone d'intérêt. Le constructeur automatique rajoute alors plusieurs couches d'éléments, servant pour le couplage, au niveau et à partir de la zone périphérique du patch  $\partial\Omega_{1f}$  (cf figure 2.17(a)). Observons que la zone de couplage  $\Omega_{1c}$  n'existe que là où elle se superpose physiquement au domaine substrat  $\Omega_0$  (cf figure 2.17(b)). Plus explicitement, si le patch a une frontière en commun avec une frontière du substrat, il n'y aura pas de création de zone de collage autour de la zone libre du patch en dehors de la matière. Le maillage de cette zone  $\Omega_{1c}$  est créé en continuité du maillage défini pour la partie libre du patch  $\Omega_{1f}$  (cf figure 2.18(a)). À partir de chaque nœud de la frontière  $\partial\Omega_{1f}$ , où il y a présence du modèle substrat, on calcule une normale à la frontière à partir de la moyenne des normales issues des nœuds voisins. En définissant certains paramètres, tels que l'épaisseur des éléments ou le nombre de couches d'éléments de couplage, il est possible de construire le maillage de la zone de collage  $\Omega_{1c}$ . Le comportement de cette zone est identique à la partie libre. Ces deux maillages compatibles en frontière définissent le maillage  $\mathcal{T}^1$  du patch.

Une fois que le modèle patch est entièrement défini avec sa zone de couplage, le maillage de cette zone de couplage  $\Omega_{1c}$  est dupliqué pour former le maillage de l'espace médiateur  $\mathcal{M}$ . Ainsi, la difficulté d'évaluation des termes de couplage, liée à l'incompatibilité des maillages dans la zone de couplage  $\Omega_{1c}$ , n'existe que pour la matrice de couplage notée  $C_0$ . Une se-



**Figure 2.17** — Construction de la zone de collage selon la géométrie.

conde modification intervient sur la "structure" intermédiaire afin d'être en mesure d'évaluer correctement les termes de pondération à retrancher aux rigidités des modèles. La zone  $\Omega_{1f}$  du maillage intermédiaire est nécessaire mais n'a pas besoin de description précise, puisque la pondération s'effectue de façon constante. Le maillage de la zone  $\Omega_{1f}$ , du maillage intermédiaire, est défini de dimension identique mais avec une discrétisation déraffinée au maximum afin de simplifier le calcul des intégrales de rigidités corrigées pour le modèle substrat  $K'_0$ . Cette zone interne  $\Omega_{1f}$  n'a pas besoin d'être reliée de façon compatible à la zone de collage  $\Omega_{1c}$  parce qu'elle n'influence pas le champ de multiplicateur servant au couplage (cf figure 2.18(b)). L'union de ces deux maillages est désigné par le maillage  $\mathcal{T}^c$ .



**Figure 2.18** — Modèle patch et maillage intermédiaire construits.

### 2.4.6 Détails et recommandations

Même si la mise en œuvre que nous avons effectuée permet une utilisation facilitée de la méthode Arlequin, il est important de respecter certaines règles de modélisation pour garder à l'approche toute sa pertinence. On note deux préconisations :

1. la zone libre du patch  $\Omega_{1f}$  doit être telle que cette zone contienne tous les éléments du substrat affectés par l'altération (contenue dans la zone libre).
2. lorsque les deux modèles superposés ont des représentations différentes de la physique du problème (homogène/hétérogène, coque/3D, continue/discrétisée, etc ). L'espace médiateur doit être choisi de sorte à éviter le "verrouillage" de la solution fine sur la solution grossière.

### 2.4.7 Résolution directe

L'ensemble de cette mise en œuvre permet d'avoir une utilisation simple de la méthode Arlequin tout en gardant un calcul précis des termes composant ses différents opérateurs. L'étape suivante est de penser à la rapidité d'exécution de la méthode qui est particulièrement attachée aux méthodes de résolution du système Arlequin complet. L'idéal étant que l'utilisation de la méthode Arlequin ne se fasse pas au détriment du temps de calcul, la rendant plus difficilement applicable du point de vue de la conception industrielle. Les performances d'utilisation de la méthode doivent égaler, (voire être meilleures) que celles obtenues avec les approches habituellement utilisées pour faire de la simulation numérique avec une représentation adaptée dans certaines zones, comme les méthodes rigides de relations linéaires entre nœuds (MPC) ou les méthodes de minimisation pour les utilisateurs plus expérimentés (Mortier surfacique).

Pour évaluer et valider la méthode, le système Arlequin est résolu dans un premier temps de façon séquentielle. La structure du système assemblé (2.21) que fournit la méthode est une matrice symétrique mais non définie positive. Cette matrice possède, en effet, des termes nuls sur la diagonale. La résolution de ce système nécessite qu'une stratégie de sélection de pivots soit utilisée pour pallier cette difficulté. Le solveur MUMPS [2] (**M**ultifrontal **M**assively **P**arallel **S**olver) a été retenu pour la résolution. Ce solveur possède en plus la particularité d'être capable de fournir une base du noyau du système, qui est utile pour la recherche des modes rigides, mais aussi d'effectuer la factorisation du système avec du multi-threading.

## 2.5 Validation des performances

Maintenant que la méthode Arlequin est mise en œuvre dans un code de calcul, nous allons évaluer les performances sur quelques cas tests. De plus, afin de faciliter l'utilisation de la méthode, une proposition de réglages de base nécessite d'évaluer l'influence des différents paramètres de la méthode.

Ces différentes évaluations sont étudiées en même temps que l'application de la méthode sur des simulations de plus en plus complexes.

### 2.5.1 Cas d'une plaque percée en deux dimensions

Pour cette première modélisation, on veut simuler le cas d'une plaque percée en deux dimensions, sollicitée en traction dans son plan. On considère pour cela une plaque carrée, de côté  $200\text{mm}$  avec un perçage de  $2\text{mm}$  de diamètre, placé au centre de la plaque. Deux côtés opposés sont soumis à des déplacements donnés, égaux en modules et opposés en sens. Les deux autres côtés sont libres (cf figure 2.19).

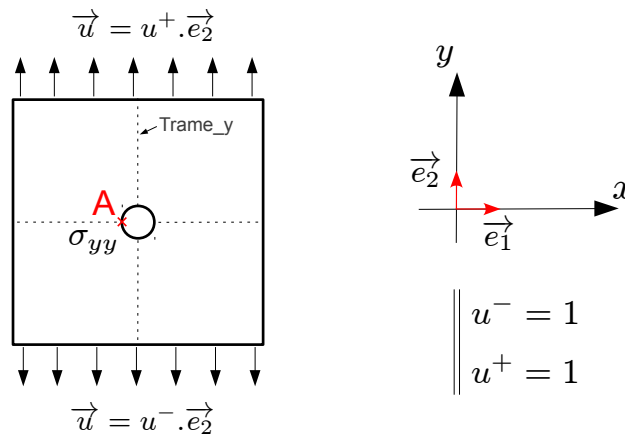
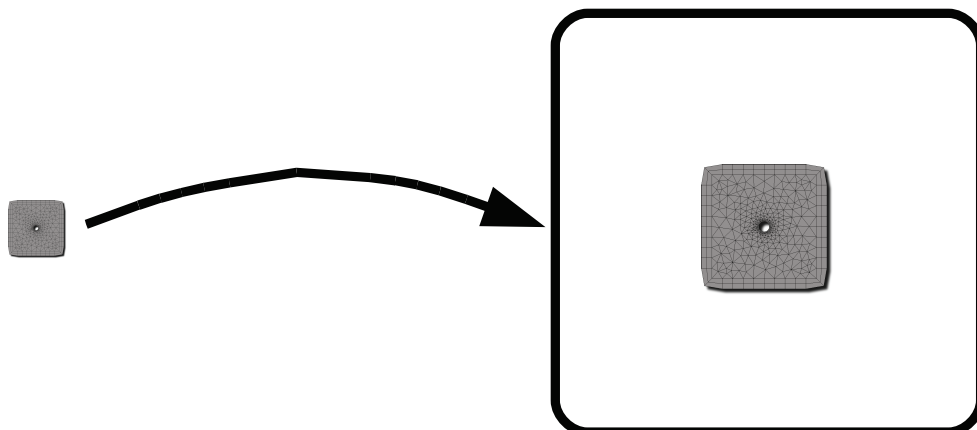


Figure 2.19 — Schéma de modélisation d'une plaque percée.

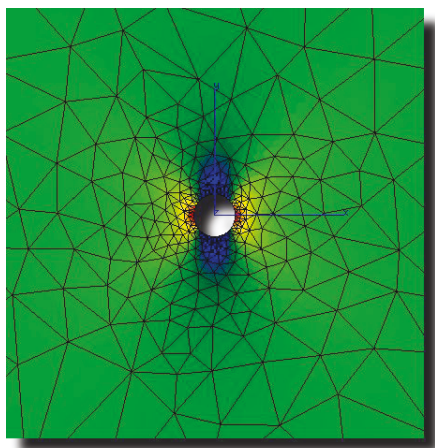
On adopte les hypothèses de petites perturbations et on suppose que le matériau constituant est élastique homogène et isotrope, de module d'Young  $E = 2 \times 10^5 \text{MPa}$  et de coefficient de Poisson  $\nu = 0,3$ .

Pour la modélisation de ce problème dans le cadre Arlequin, la plaque sans perçage est représentée par un modèle substrat élastique ayant une discrétisation régulière de type grille. Cette grille est composée de  $32 \times 32 = 1024$  carrés, tous identiques de type bi-linéaire avec 4 nœuds (élément C2D4). Le perçage est représenté par un patch, élastique et linéaire, carré de  $40\text{mm}$  de côté avec une discrétisation triangulaire de Delaunay, raffinée en bord de perçage. Cette discrétisation est constituée de 630 éléments quadratiques triangles avec 6 nœuds, isoparamétriques (élément C2D6) (cf figure 2.20). Les zones de couplage du patch et du maillage intermédiaire sont constituées d'éléments quadratiques rectangulaires à 8 nœuds (élément C2D8). Le zone libre du maillage intermédiaire est constitué de 3 éléments triangles linéaires (élément C2D3). Ainsi, on démontre la possibilité d'effectuer une modélisation avec un couplage entre éléments finis possédant des ordres et des géométries différentes.

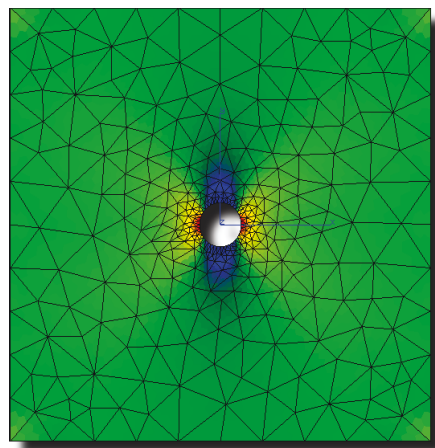


**Figure 2.20** — Modélisation Arlequin du problème de plaque percée en deux dimensions.

Afin d'évaluer les performances de la méthode, les résultats Arlequin sont comparés à ceux obtenus à l'aide d'une modélisation monomodèle d'éléments triangulaires quadratiques classiques à 1402 éléments. Le nombre d'éléments entre les deux modélisations est donc équivalent sachant que les discrétisations au voisinage du trou sont identiques. Pour ce cas bidimensionnel, la comparaison porte sur la valeur de la contrainte  $\sigma_{yy}$ , au nœud le plus proche du bord de perçage (point A cf figure 2.19). Par ailleurs, les influences de la pondération des énergies, de l'opérateur de couplage et du nombre des couches de couplage sur les résultats sont examinés. Ils sont reportés dans le tableau (2.1).



(a) Cas de référence



(b) Patch Arlequin

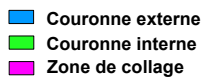
**Figure 2.21** — Comparaison de la réponse de la contrainte  $\sigma_{yy}$  entre le cas de référence et le patch Arlequin.

Ce tableau permet de comparer des patchs ayant une, deux, quatre ou huit couches d'éléments assurant le couplage entre les modèles (cf figures 2.22). De plus pour chaque cas, on

	Ponderation	$L^2$	$H^1$	Energ + int	Energ + ext	Energ + int et ext
<b>n = 1</b>	w=cst	0,16 %	0,15 %	0,11 %	0,17 %	0,10 %
<b>n = 1</b>	w=lin	0,16 %	0,15 %	0,11 %	0,17 %	0,10 %
<b>n = 1</b>	w=R	0,16 %	0,15 %	0,11 %	0,17 %	0,10 %
<b>n = 2</b>	w=cst	0,16 %	0,15 %	0,11 %	0,16 %	0,11 %
<b>n = 2</b>	w=lin	0,16 %	0,15 %	0,11 %	0,15 %	0,12 %
<b>n = 2</b>	w=R	0,16 %	0,15 %	0,11 %	0,15 %	0,12 %
<b>n = 4</b>	w=cst	0,18 %	0,15 %	0,12 %	0,25 %	0,11 %
<b>n = 4</b>	w=lin	0,16 %	0,15 %	0,13 %	0,16 %	0,12 %
<b>n = 4</b>	w=R	0,16 %	0,16 %	0,13 %	0,69 %	0,12 %
<b>n = 8</b>	w=cst	0,16 %	0,16 %	0,14 %	0,20 %	0,12 %
<b>n = 8</b>	w=lin	0,17 %	0,17 %	0,17 %	0,21 %	0,14 %
<b>n = 8</b>	w=R	0,18 %	0,17 %	0,18 %	0,21 %	0,16 %

**Tableau 2.1** — Tableau d'erreurs de  $\sigma_{yy}$  par rapport à un cas de référence quadratique.

teste différents opérateurs de couplage ( $\mathcal{L}^2$ ,  $\mathcal{H}^1$ , énergétique avec blocage par couronne intérieure, extérieure ou les deux). Enfin, pour toutes ces simulations, le type de pondération varie entre des fonctions constantes (valant 0, 5), des fonctions linéaires ou des fonctions plus régulières. Les paramètres choisis pour les opérateurs de couplage suivent les recommandations données dans [37], en prenant le coefficient  $K$  relatif à la raideur du matériau. Le paramètre  $l$ , de longueur caractéristique de  $1mm$ , est retenu égal à l'épaisseur d'une couche d'éléments de collage.



**Figure 2.22** — Patch avec augmentation du nombre d'éléments dans la zone de collage.

On constate que, pour le couplage d'un modèle substrat linéaire avec un modèle patch quadratique, l'opérateur de couplage, le type de fonction de pondération ou le nombre de couches d'éléments de couplage n'influent pas sur la qualité du résultat de la contrainte  $\sigma_{yy}$  en bord de perçage. Ainsi, changer le type d'opérateur peut s'effectuer sans modifier la qualité des résultats.

Les résultats de ces simulations peuvent aussi s'observer sur le couplage des déplacements entre les deux modèles. Observons la progression des déplacements selon  $\vec{e}_2$  par rapport aux points situés sur la ligne "trame\_y" (cf figure 2.19). Pour améliorer la visualisation



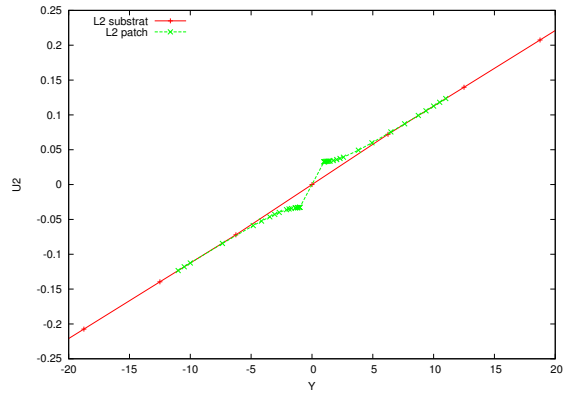
du couplage entre les deux modèles, on ne représente qu'une partie des nœuds du maillage substrat, compris entre les coordonnées en  $y$   $[-20, 20]$ , pour les cinq différents types d'opérateur. La zone d'intérêt du patch est située dans la zone  $[-10, 10]$  avec une zone de couplage qui diverge selon le type d'opérateur de couplage. La zone de couplage pour les opérateurs  $\mathcal{L}^2$  et  $\mathcal{H}^1$  est située dans les parties  $[-11, -10]$  et  $[10, 11]$  (cf figures 2.23(a) et 2.23(b)). Pour les opérateurs à une couronne de type énergétique, la zone de couplage est située dans les parties  $[-12, -10]$  et  $[10, 12]$  (cf figures 2.23(c) et 2.23(d)). Enfin pour le couplage énergétique avec couronnes intérieure et extérieure, cette zone est  $[-13, -10]$  et  $[10, 13]$  (cf figure 2.23(e)).

En bilan, on remarque que les modèles sont parfaitement reliés quelque soit l'opérateur de couplage utilisé (cf figures 2.23). Malgré les maillages incompatibles, le champ de déplacement  $U_y$  du modèle patch suit le champ de déplacement du modèle substrat dans la zone de collage et évolue suivant le rapprochement du perçage.

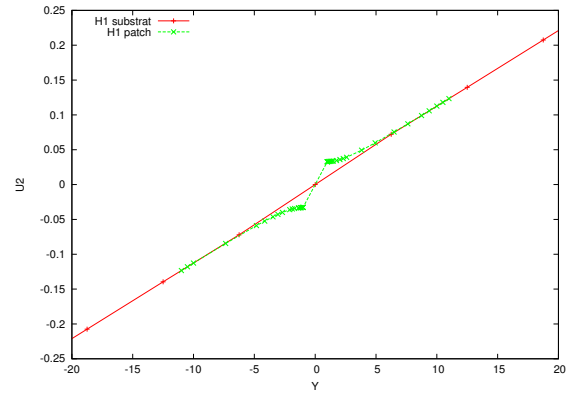
Comme expliqué lors de la mise en œuvre de la méthode, l'opérateur de couplage énergétique nécessite l'utilisation d'un opérateur de projection ainsi qu'une stratégie de blocage des modes rigides. Pour bien comprendre l'utilité de ce blocage, on expérimente certaines situations basées uniquement sur des mouvements de corps rigides. Pour cela, le problème de plaque percée est repris et seuls les chargements sont modifiés. On impose un mouvement de corps rigide à la plaque par le biais d'un déplacement vertical vers le haut, au niveau des frontières supérieure et inférieure. Pour le domaine patch, un déplacement vertical opposé, vers le bas, est apposé en bord de perçage (cf figure 2.24).

- dans un premier scénario, l'opérateur énergétique est employé sans utiliser de couronne de blocage. Dans ce cas, lors de la simulation, le solveur détecte trois modes rigides correspondant à deux déplacements et une rotation du domaine patch. L'observation des résultats nous montre que les mouvements de corps rigides du modèle substrat ne sont pas transmis au modèle patch. De plus, on constate que les contraintes de Von-Mises sont nulles sur l'ensemble des modèles (cf figures 2.25(b)).
- dans un deuxième scénario, l'opérateur énergétique est employé avec blocage des modes rigides par une couronne interne. Cependant, plutôt que d'utiliser le terme de projection  $\mathcal{L}^2$ , l'opérateur employé est de type  $\mathcal{H}^1$  sans les termes  $\mathcal{L}^2$  (cf annexe A). Lors de la simulation, le solveur ne détecte pas de modes rigides néanmoins, lors de l'observation des résultats, on constate que les mouvements du substrat ne sont pas transmis au modèle patch (cf figure 2.25(a)). De plus, de la même manière que pour la configuration précédente, les contraintes de Von-Mises sont nulles (cf figure 2.25(b)). Les résultats visuels de simulations sont exactement les mêmes que dans la configuration précédente. Dans ce cas, le noyau de l'opérateur de couplage est bien nul rendant la matrice inversible, cependant, les modes rigides du modèle substrat ne sont pas transférés lorsque l'on utilise un opérateur de transfert de ce type. Il est possible d'utiliser un opérateur de transfert de type  $\mathcal{H}^1$ , puisque le terme  $\mathcal{L}^2$  transmet les modes rigides, cependant, il est plus compliqué à mettre en œuvre. En effet, on doit alors régler le paramètre de longueur caractéristique. De plus, son évaluation est plus complexe qu'un opérateur de transfert de type  $\mathcal{L}^2$ .

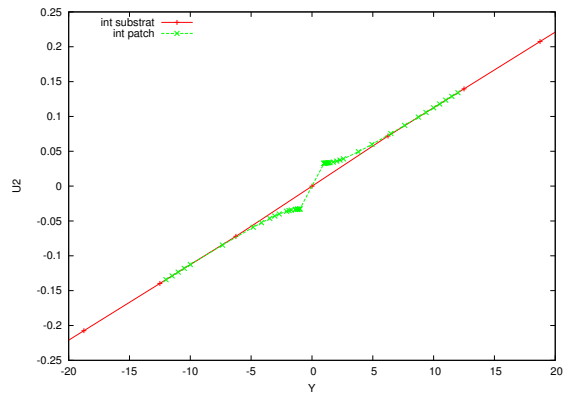




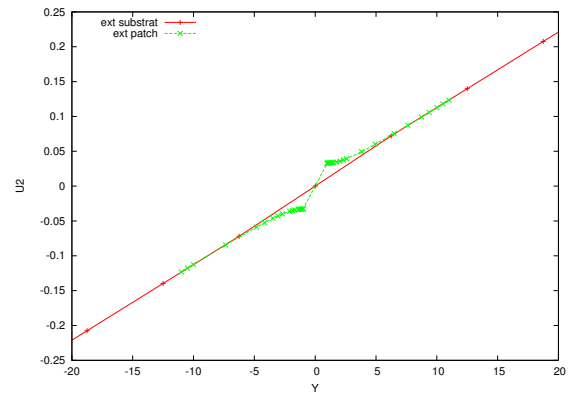
(a) Opérateur de couplage L2



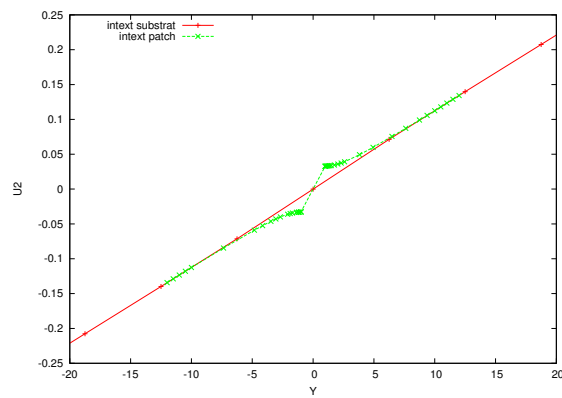
(b) Opérateur de couplage H1



(c) Opérateur de couplage énergétique avec couronne interne



(d) Opérateur de couplage énergétique avec couronne externe



(e) Opérateur de couplage énergétique avec couronne interne et externe

**Figure 2.23** — Courbe de déplacement selon l'axe  $y$  des nœuds situés sur la ligne  $\text{trame}_y$  des modèles  $\text{substrat}$  et  $\text{patch}$ .

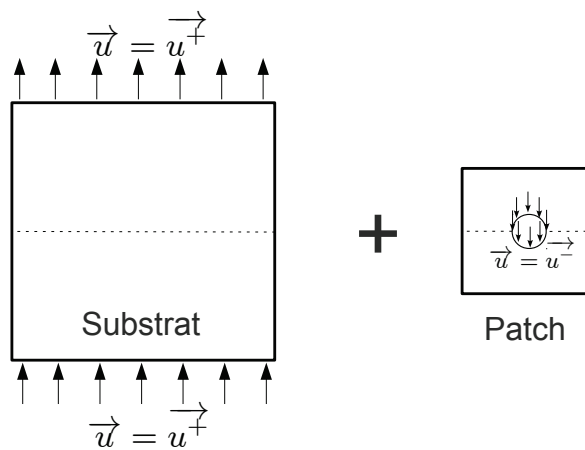
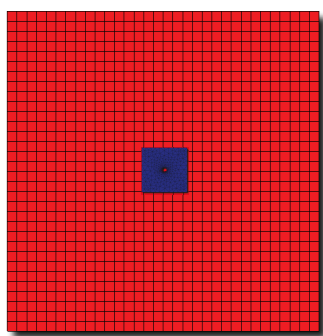
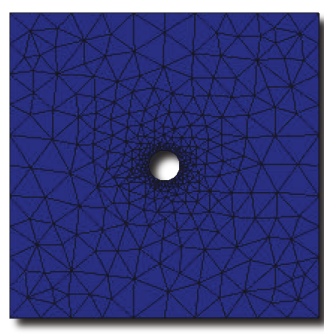


Figure 2.24 — Schéma de sollicitations des modes rigides d'une plaque percée.



(a) Déplacement vertical



(b) Contraintes de Von-Mises

Figure 2.25 — Tests de configurations concernant l'opérateur énergétique

### 2.5.2 Cas d'une simulation multipatch en trois dimensions.

Pour cette deuxième modélisation, on considère le cas d'une poutre en forme de L en trois dimensions comportant une rigole (cf figure 2.26). Cette poutre a un déplacement imposé nul sur la surface  $[CDJK]$  et est sollicitée par un déplacement vertical vers le bas sur la surface  $[AFHG]$ . Le matériau employé pour tous les modèles est un acier possédant un module d'Young  $E = 2 \times 10^5 \text{MPa}$  et un coefficient de Poisson de  $\nu = 0,3$ . On reste dans le cadre des petites perturbations et dans le domaine élastique.

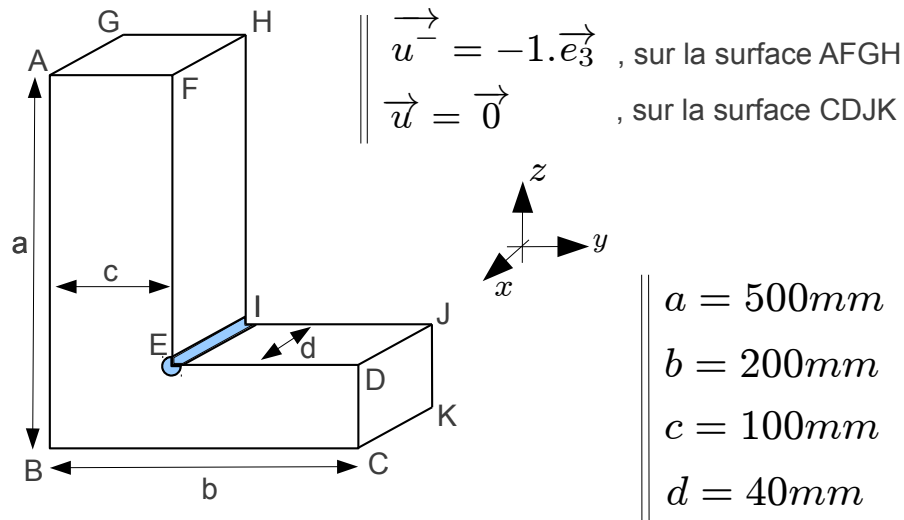


Figure 2.26 — Schéma de la poutre L en 3 dimensions.

Pour la modélisation du problème dans le cadre Arlequin, il y a cinq modèles (cf figure 2.27). Le premier, noté ①, est le modèle substrat qui représente l'ensemble de la poutre et possède un maillage régulier de type brique trilinéaire de 3072 éléments avec deux éléments dans l'épaisseur. Le premier patch, noté ②, est un modèle raffiné permettant d'intégrer une rigole, de 2mm de diamètre de centre  $[EI]$ . Ce patch est positionné dans le coin de la poutre et composé de 2900 éléments avec cinq éléments dans l'épaisseur (même nombre d'éléments dans l'épaisseur que les autres patches). Le deuxième patch, noté ③, est composé de 2010 éléments et permet de faire le lien avec des patches plus raffinés (dans notre cas, c'est surtout plus démonstratif des possibilités que d'une quelconque utilité). Ce patch, ③, fait la passerelle entre le modèle substrat, ①, et les deux patches raffinés, ④ et ⑤ : ces deux derniers patches ne sont collés que sur le patch ③. Pour ces deux patches qui représentent les coins surcontraints, les modèles sont identiques et sont composés de 960 éléments (④,⑤). Le maillage du modèle ⑤ est construit par une duplication du maillage ④, puis une rotation pour que le raffinement soit dans le coin inférieur droit. On montre la possibilité d'employer un même maillage pour plusieurs patches sans devoir en créer un nouveau.

Le but de cette simulation est de montrer la robustesse et les possibilités qu'offrent la méthode Arlequin pour la modélisation des structures. Dans ce cas, la modélisation est constituée à l'aide de quatre patches qui permettent d'avoir une discrétisation raffinée dans les zones de fortes contraintes. Ces patches ont pour particularités supplémentaires d'avoir des maillages incompatibles, autant de façon longitudinale que dans l'épaisseur par rapport

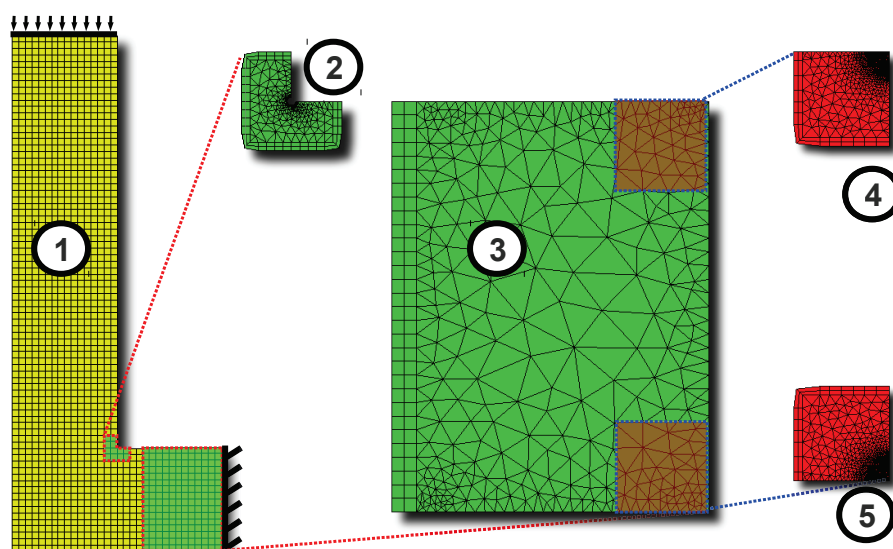


Figure 2.27 — Modélisation d'une poutre avec 4 patches dont 2 patches situés sur un patch.

au modèle substrat. Dans cette simulation, on expose aussi le fait que l'on puisse superposer un patch sur un autre patch intermédiaire comme pour les modèles ④ et ⑤ sur le modèle ③.

Afin de montrer l'efficacité de la modélisation Arlequin, on montre le champ de contraintes de Von-Mises obtenu sur les trois patches raffinés (①,④,⑤). On constate que les zones de surcontraintes sont localisées dans trois coins de la poutre (cf figure 2.28) et que, si on compare à un cas monomodèle, les erreurs sur les contraintes maximales varient entre 0,4 à 6% pour 2, 5 fois moins de degrés de liberté.

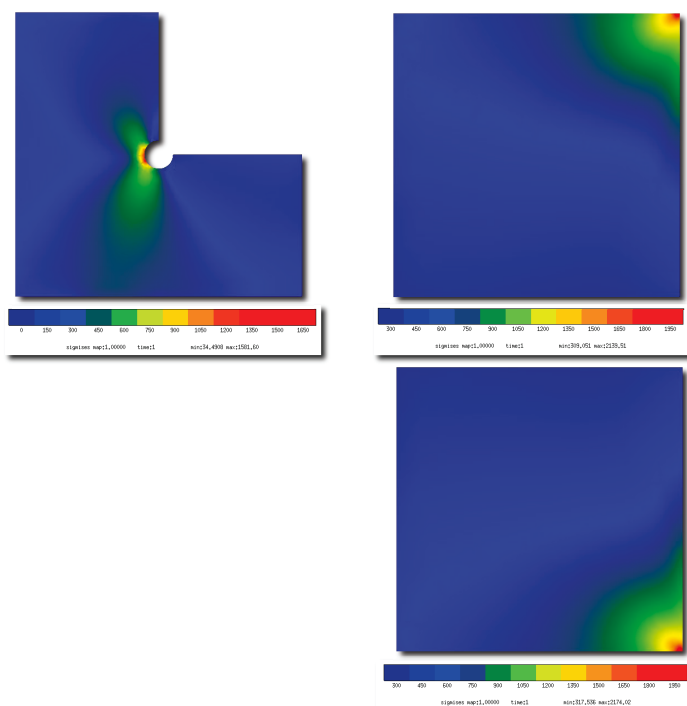


Figure 2.28 — Représentation de la contrainte de VonMises sur les trois patches raffinés.

## 2.6 Bilan

Dans ce chapitre, la formulation Arlequin a été rappelée avec tous les constituants, utilisés en mécanique continue, que l'on peut trouver dans la littérature. L'originalité porte sur la façon avec laquelle nous avons choisi de la mettre en œuvre dans le code de calcul éléments finis, Z-set/ZéBuLoN. Cette mise en œuvre voulant répondre aux besoins de robustesse et de flexibilité, aucune hypothèse restrictive ne porte sur la compatibilité des modèles. Seuls le modèle substrat et le modèle libre du patch font parties des données initiales, nécessaires à la formulation du système Arlequin. Grâce à un outil de construction de maillage, une zone de collage est ajoutée à la périphérie de la zone libre du patch. Un espace intermédiaire, dérivé du modèle patch, fait alors la liaison entre le substrat et le patch. Seule la zone du maillage intermédiaire, utilisée dans la zone de collage, est conservée. La zone interne, ne servant qu'à la pondération des modèles, est déraffinée afin de réduire les coûts de calcul des matrices de rigidités pondérées. Une fois que les modèles sont construits, il est possible d'évaluer les termes de rigidités et de couplages grâce à des techniques de transferts de champs ainsi que par l'utilisation d'un algorithme qui génère une règle d'intégration adaptée pour le maillage intermédiaire. Cet algorithme permet l'utilisation robuste de la méthode Arlequin dans le cas de maillages non compatibles.

Dès que les termes, nécessaires à la formulation Arlequin, peuvent être évalués, la mise en œuvre est complétée à l'aide d'éléments créés dynamiquement. Pour une bonne utilisation de la méthode, des détails et recommandations sont donnés. Une explication plus détaillée de l'opérateur de couplage de type énergétique est également fournie. Enfin, les performances de cette mise en œuvre sont testées et validées.



---

## Décomposition et Parallélisation de la méthode Arlequin

Dans ce chapitre, une stratégie de résolution, permettant d'utiliser efficacement les machines à architecture parallèle, est présentée pour une application à des problèmes issus de formulation Arlequin. L'objectif est de disposer, à terme, d'un outil robuste et efficace pour traiter des problèmes complexes produisant des systèmes d'équations de grande taille.

Dans la première partie, sont expliqués les principes des méthodes de décomposition de domaine sur lesquelles sont basés ces développements. On détaille les approches primale et duale ainsi que certains préconditionneurs, qui permettent d'améliorer considérablement les performances des solveurs itératifs employés dans ce type d'approches.

Dans une seconde partie, l'association des techniques par décomposition de domaine à la méthode Arlequin est exposée, ainsi qu'un préconditionneur allégé fournissant d'excellentes performances lorsqu'il est associée à une méthode originale de transmission des modes rigides. La mise en œuvre de cette méthode a été menée au sein du code Z-Set/ZéBuLoN. La fin du chapitre est ainsi consacrée à l'évaluation des performances de cette approche pour la résolution de problèmes mécaniques mono et multipatchs.

### 3.1 Introduction

La mise en œuvre opérationnelle de la méthode Arlequin, exposée au chapitre précédent, nous permet de disposer d'une stratégie numérique à fort potentiel pour la modélisation d'une grande variété de problèmes multiéchelles. Cependant, alors que le logiciel Z-Set/Zébulon dispose de fonctionnalités évoluées pour la résolution par décomposition de domaine, il semble regrettable de ne pas pouvoir en bénéficier lors de résolutions de problèmes Arlequin, où la nature même des conditions de raccords semble fournir un cadre particulièrement favorable pour ce type d'approche.

Si l'utilisation de solveurs gérant le multi-processus, dit multithreading, sont capables de répartir un calcul sur plusieurs unités de traitement, ce type d'approche n'est malheureusement pas bien adapté aux modélisations Arlequin. En effet, la présence de nombreux termes diagonaux nuls (liés aux multiplicateurs) conduit à devoir recourir à des stratégies de pivotements, qui ne facilitent pas la tâche de parallélisation éventuelle, lors d'approche multifrontale ou par dissection. En conséquence, ce type de résolution, employé pour un système Arlequin, s'avère non adapté pour la factorisation puisque le temps de résolution ne diminue pratiquement pas lorsque le nombre de threads, ou tâches, augmente.

L'approche que nous avons retenue, ici, repose sur l'écriture du système matriciel Arlequin dans un contexte de décomposition de domaine avec interfaces recouvrantes. La méthode Arlequin, par sa nature multiéchelle, distingue naturellement des sous-problèmes séparés. Ainsi, le recours à un solveur parallèle itératif semble bien approprié. Les travaux précédents relatifs à la résolution parallèle des systèmes Arlequin sont ceux développés dans le cadre de la thèse de N. Elkhodja [37, 15]. Ils ont permis d'établir un préconditionneur allégé qui est repris dans la suite et exploité efficacement sur des problèmes complexes, avec interfaces incompatibles.

Pour simplifier et clarifier les développements qui suivent, une présentation basée sur la décomposition en deux sous-domaines a été choisie, ce qui nous a semblé pertinent au vu de l'application à un cadre Arlequin où les jonctions entre modèles sont généralement réalisées par paires.

### 3.2 Décomposition de domaine sans recouvrement

L'origine des approches par décomposition de domaine remonte aux travaux de H. Schwarz [109, 110] (cf section 1.2.2). Leur réel essor est dû à l'augmentation des tailles des problèmes à résoudre et la nécessité de disposer de stratégies de résolution pouvant tirer parti des calculateurs à architecture parallèle.

Depuis une vingtaine d'années, des méthodes de décomposition de domaines (MDD) [38, 85, 48] ont pris un essor considérable dans le cas de domaines non-recouvrants (le plus souvent pour des interfaces surfaciques compatibles). D'un point de vue algébrique, il n'existe pas d'obstacle insurmontables au traitement par décomposition de domaine d'un recouvrement volumique dont la discrétisation dans un cadre éléments finis fait apparaître des maillages incompatibles.

Reconsidérons le problème classique d'élasticité linéaire défini au chapitre précédent



(cf 2.2). Il est possible de partitionner ce domaine  $\Omega$  en deux sous-domaines  $\Omega^{(1)}$  et  $\Omega^{(2)}$  possédant une interface  $\Upsilon$  non recouvrante (cf figure 3.1). Les frontières de ces domaines sont réparties ;

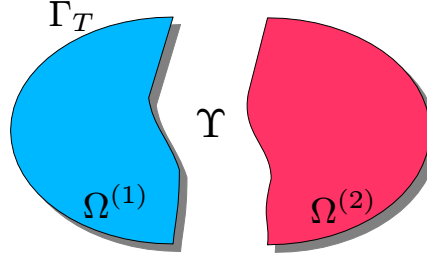


Figure 3.1 — Décomposition en deux sous-domaines.

$$\partial\Omega^{(1)} = \Gamma_u \cup \Gamma_T^{(1)} \cup \Upsilon \quad (3.1)$$

$$\partial\Omega^{(2)} = \Gamma_T^{(2)} \cup \Upsilon \quad (3.2)$$

$$\Upsilon = \partial\Omega^{(1)} \cap \partial\Omega^{(2)} \quad (3.3)$$

Un déplacement  $\vec{u}^0$  est appliqué sur la partie  $\Gamma_u$ , du sous-domaine  $\Omega^{(1)}$ , et des efforts imposés  $T^{(i)}$  sur les parties  $\Gamma_T^{(i)}$  ( $i = \{1, 2\}$ ). Le problème complet (cf partie 2.3), peut s'écrire sous la forme des deux problèmes suivants où il faut trouver  $(\vec{u}^{(1)}, \vec{u}^{(2)}) \in \mathcal{W}^{(1)} \times \mathcal{W}^{(2)}$  ;

$$\begin{aligned} \forall \vec{v}^{(1)} \in \mathcal{W}^{(1)}, \quad \int_{\Omega^{(1)}} \underline{\underline{\sigma}}(\vec{u}^{(1)}) : \underline{\underline{\epsilon}}(\vec{v}^{(1)}) dv &= \int_{\Omega^{(1)}} \vec{f}^{(1)} \cdot \vec{v}^{(1)} dv + \int_{\Gamma_T^{(1)}} \vec{T}^{(1)} \cdot \vec{v}^{(1)} ds \end{aligned} \quad (3.4)$$

$$\begin{aligned} \forall \vec{v}^{(2)} \in \mathcal{W}^{(2)}, \quad \int_{\Omega^{(2)}} \underline{\underline{\sigma}}(\vec{u}^{(2)}) : \underline{\underline{\epsilon}}(\vec{v}^{(2)}) dv &= \int_{\Omega^{(2)}} \vec{f}^{(2)} \cdot \vec{v}^{(2)} dv + \int_{\Gamma_T^{(2)}} \vec{T}^{(2)} \cdot \vec{v}^{(2)} ds \end{aligned} \quad (3.5)$$

avec

$$\mathcal{W}^{(1)} = \left\{ \vec{v}^{(1)} \in (\mathcal{H}^1(\Omega^{(1)}))^n; \vec{v}^{(1)} = \vec{u}^0 \text{ sur } \Gamma_u \right\} \quad (3.6)$$

$$\mathcal{W}^{(2)} = \left\{ \vec{v}^{(2)} \in (\mathcal{H}^1(\Omega^{(2)}))^n \right\} \quad (3.7)$$

Il est à noter que  $\vec{T}^{(i)} = \underline{\underline{\sigma}}^{(i)} \cdot \vec{n}^{(i)}$ . Les deux domaines sont reliés, au niveau de l'interface  $\Upsilon$ , par les conditions de transmissions suivantes :

– la continuité des déplacements :

$$\vec{u}^{(1)} = \vec{u}^{(2)} \quad \text{sur} \quad \Upsilon \quad (3.8)$$

– l'équilibre des efforts :

$$\underline{\underline{\sigma}}^{(1)} \cdot \vec{n}^{(1)} + \underline{\underline{\sigma}}^{(2)} \cdot \vec{n}^{(2)} = \vec{0} \quad \text{sur } \Upsilon \quad (3.9)$$

Les équations (3.4), (3.5) et les équations de raccord (3.8) et (3.9) produisent alors un système équivalent au problème écrit sur le domaine global.

En pratique, la stratégie de résolution usuelle de ce type de problème revient à condenser l'écriture d'un système d'équations aux interfaces en utilisant deux approches. La première, dite primale, consiste à imposer la continuité des déplacements d'interface (3.8), en ne conservant qu'une unique inconnue de déplacement d'interface, pour les deux systèmes puis de satisfaire, à convergence, l'équilibre des efforts (3.9). La deuxième approche, dite duale, fonctionne en imposant l'équilibre des efforts sur l'interface, en utilisant une unique inconnue d'inter-efforts, puis en assurant, à convergence, la continuité des déplacements d'interface. Il existe aussi d'autres procédures dites mixtes qui sont basées sur une communication d'une combinaison de déplacements et d'efforts d'interface. Les deux premières procédures de résolution sont expliquées plus en détail dans les deux parties suivantes, car c'est à partir de celles-ci que sont développées l'approche de résolution par décomposition de domaine du système Arlequin. Pour détailler les explications relatives aux deux premières approches pour des discrétisations de type éléments finis, définissons tout d'abord quelques opérateurs indispensables.

Notons l'espace fonctionnel de l'interface entre ces deux sous-structures, qui est d'une dimension inférieure à celles-ci :

$$\mathcal{Y}_\Upsilon = \mathcal{H}^{1/2} \left( \sum_{(s)} \Upsilon^{(s)} \right) \quad (3.10)$$

Les ensembles définis, il faut s'intéresser aux passages entre les différents espaces. La première opération qui permet de passer d'un sous-domaine à son interface est l'opérateur de trace  $Tr^{(s)}$  :

$$Tr^{(s)} : \mathcal{H}^1(\Omega^{(s)}) \rightarrow \mathcal{H}^{1/2}(\Upsilon^{(s)}) \quad (3.11)$$

$$\vec{v}^{(s)} \rightarrow \vec{v}|_{\Upsilon^{(s)}}^{(s)} \quad (3.12)$$

Cette écriture est due aux méthodes de décomposition de domaine où l'on distingue les aspects "*globaux*" (termes définis sur l'ensemble de la structure  $\Omega$  ou sur l'interface  $\Upsilon$ ) des aspects "*locaux*" (termes définis séparément pour chacun des sous-domaines  $\Omega^{(s)}$  ou de leur interface respectif  $\Upsilon^{(s)}$ ). On constate que l'opérateur de trace  $Tr^{(s)}$  est une opération locale. Afin de communiquer entre les différents sous-domaines, on emploie des opérateurs qui s'intéressent aux passages entre les grandeurs locales et les grandeurs globales. Ces opérations sont de type assemblages, nommées projection, ou de type localisation, nommées restriction. L'opération la plus simple est l'injection canonique de  $\Upsilon^{(s)}$  dans  $\Upsilon$  est :

$$A^{(s)} : \mathcal{Y}_{\Upsilon^{(s)}} \rightarrow \mathcal{Y}_\Upsilon \quad (3.13)$$

$$\vec{v}^{(s)} \rightarrow \begin{cases} A^{(s)} \vec{v}^{(s)} = \vec{v}^{(s)} \text{ sur } \Upsilon^{(s)} \\ A^{(s)} \vec{v}^{(s)} = \vec{0} \text{ ailleurs} \end{cases} \quad (3.14)$$

et réciproquement de  $\Upsilon$  dans  $\Upsilon^{(s)}$  :

$$A^{(s)-1} : \mathcal{Y}_{\Upsilon} \rightarrow \mathcal{Y}_{\Upsilon^{(s)}} \quad (3.15)$$

$$\vec{v}^{(s)} \rightarrow A^{(s)-1} \vec{v}^{(s)} = \vec{v}_{|\Upsilon^{(s)}}^{(s)} \quad (3.16)$$

On remarque que ces opérations sont définies différemment selon le type d'approche lorsque l'on a plusieurs interfaces et notamment par rapport aux types de connectivités et à l'apparition de points triples. Plus de détails sont disponibles dans les travaux de P. Gosselet [47].

### 3.2.1 Approche primale

L'approche Primale est aussi dénommée **BDD** pour **Balancing Domain Decomposition**. Elle a été proposée par J. Mandel [85]. Dans cette approche, la continuité des déplacements est imposée sur l'interface puis, via une condensation des sous-systèmes, un solveur itératif assure, à convergence, l'équilibre des interefforts. À partir de l'équation du système global, pour chaque sous-domaine  $\Omega^{(s)}$ ,  $s \in \{1, 2\}$ , le système est redéfini en fonction des variables internes ( $i$ ) et des variables d'interfaces ( $b$ ) :

$$K^{(s)} U^{(s)} = F^{(s)} \rightarrow \begin{bmatrix} K_{ii}^{(s)} & K_{ib}^{(s)} A^{(s)T} \\ A^{(s)} K_{bi}^{(s)} & \sum_{(s)} A^{(s)} K_{bb}^{(s)} A^{(s)T} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U_i^{(s)} \\ U_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_i^{(s)} \\ \sum_{(s)} A^{(s)} F_b^{(s)} \end{bmatrix} \quad (3.17)$$

$K^{(s)}$  étant la matrice de rigidité d'un sous-domaine,  $U^{(s)}$  le déplacement relatif,  $F^{(s)}$  le vecteur d'efforts extérieurs. Le déplacement à l'interface  $U_b$  est défini de façon unique afin d'avoir automatiquement la continuité des interfaces, les réactions sont alors naturellement éliminées. Le déplacement interne  $U_i^{(s)}$  peut s'obtenir à partir de l'inverse de l'opérateur de rigidité puisque le système est soumis à des conditions de Dirichlet ( $U_b$ ).

$$U_i^{(s)} = K_{ii}^{(s)-1} [F_i^{(s)} - K_{ib}^{(s)} A^{(s)T} U_b] \quad (3.18)$$

Ce système est régulier. Ce champ interne peut être remplacé dans les équations relatives aux interfaces par projection. Soit :

$$\sum_{(s)} A^{(s)} \left[ K_{bb}^{(s)} - K_{bi}^{(s)} K_{ii}^{(s)-1} K_{ib}^{(s)} \right] A^{(s)T} U_b = \sum_{(s)} A^{(s)} \left[ F_b^{(s)} - K_{bi}^{(s)} K_{ii}^{(s)-1} F_i^{(s)} \right] \quad (3.19)$$

Ce qui est équivalent à :

$$\sum_{(s)} A^{(s)} S_p^{(s)} A^{(s)T} U_b = \sum_{(s)} A^{(s)} b_p^{(s)} \quad (3.20)$$

avec comme définitions des termes :

$$\begin{cases} S_p^{(s)} = K_{bb}^{(s)} - K_{bi}^{(s)} K_{ii}^{(s)-1} K_{ib}^{(s)} \\ b_p^{(s)} = F_b^{(s)} - K_{bi}^{(s)} K_{ii}^{(s)-1} F_i^{(s)} \end{cases} \quad (3.21)$$

L'équation (3.20) représente la condensation d'un sous-domaine au niveau de l'interface,  $S_p^{(s)}$  étant l'opérateur de Schur primal d'un sous-modèle et  $b_p^{(s)}$  les efforts résultants. Pour assembler les deux sous-domaines dans l'approche primale, on impose la continuité des déplacements (3.8) à l'interface. Ainsi, pour notre problème à deux sous-domaines, sur l'interface, les sous-systèmes condensés sont sommés afin d'obtenir l'écriture bloc du système primal :

$$\begin{aligned} \left( A^{(1)} S_p^{(1)} A^{(1)T} + A^{(2)} S_p^{(2)} A^{(2)T} \right) U_b &= A^{(1)} b_p^{(1)} + A^{(2)} b_p^{(2)} \\ S_p U_b &= b_p \end{aligned} \quad (3.22)$$

où dans le cas général :

$$\begin{cases} S_p = \sum_{(s)} A^{(s)} S_p^{(s)} A^{(s)T} \\ b_p = \sum_{(s)} A^{(s)} b_p^{(s)} \end{cases} \quad (3.23)$$

C'est la vérification de cette équation (3.22) qui permet de vérifier l'équilibre des efforts.

### 3.2.2 Approche duale

Dans cette deuxième méthode dénommée **FETI** pour **Finite Element Tearing and Interconnecting**, développée par C. Farhat et F.X. Roux [38], c'est l'équilibre des efforts qui est imposé sur l'interface puis, via une condensation des sous-systèmes, le solveur itératif assure, à convergence, la continuité des déplacements. En partant des problèmes (3.17) mais sans imposer l'unicité du déplacement d'interface, les systèmes relatifs aux sous-domaines s'écrivent :

$$K^{(s)} U^{(s)} = F^{(s)} + \lambda^{(s)} \quad (3.24)$$

$$\sum_{(s)} A^{(s)} t^{(s)} U^{(s)} = 0 \quad (3.25)$$

$$\sum_{(s)} A^{(s)} t^{(s)} \lambda^{(s)} = 0 \quad (3.26)$$

avec  $t^{(s)}$ , la discrétisation de l'opérateur de trace  $Tr^{(s)}$  (3.11). Si on impose l'unicité de l'inconnue d'interface  $\lambda_b$ , où  $\lambda^{(s)} = A^{(s)T} \lambda_b$ . L'équation (3.27) devient :

$$K^{(s)} U^{(s)} = F^{(s)} + t^{(s)T} A^{(s)T} \lambda_b \quad (3.27)$$

Pour écrire le problème en fonction des variables d'efforts  $\lambda_b$ , il faut éliminer les inconnues de déplacements  $U^{(s)}$  en inversant éventuellement la matrice de rigidité  $K^{(s)}$ . Or, ce système définit l'équilibre du sous-domaine  $\Omega^{(s)}$  soumis à un effort sur son interface. Ceci peut conduire à un système posé, pour une solution définie, à un mouvement de corps rigides près (suite à un potentiel manque de conditions de Dirichlet) comme pour le sous-domaine  $\Omega^{(2)}$  pour notre problème à deux sous-domaines. Dans ces conditions, on utilise la pseudo-inverse de  $K^{(2)}$ , notée  $K^{(2)+}$ , définie par :

$$\forall x \in Im(K^{(2)}), \quad K^{(2)} K^{(2)+} x = x \quad (3.28)$$

Les variables du problème sont ainsi décomposées en celles appartenant à la partie déformée de la structure (dans  $Im(K^{(2)})$ ) et celles appartenant à la partie rigide (dans  $Ker(K^{(2)})$ ) à énergie nulle. Il est donc nécessaire de faire apparaître une base  $R$  de  $Ker(K^{(2)})$  et  $\alpha$  un vecteur d'amplitudes des déplacements de solides rigides. On écrit alors :

$$U^{(2)} = K^{(2)+} (F^{(2)} + t^{(2)T} A^{(2)T} \cdot \lambda_b) + R \cdot \alpha \quad (3.29)$$

Cette expression doit être accompagnée d'une condition nécessaire pour fixer les modes rigides. En notant que  $x \in Im(K^{(2)}) \leftrightarrow x \perp Ker(K^{(2)T})$  et en utilisant la symétrie de  $K^{(2)}$ , cette condition s'écrit :

$$R^T (F^{(2)} + t^{(2)T} A^{(2)T} \cdot \lambda_b) = 0 \quad (3.30)$$

Lorsque l'on condense l'équation (3.29) au niveau de l'interface, à l'aide de l'équation de continuité des déplacements (3.8) et de l'équilibre des efforts (3.9), le système complet peut alors être posé en fonction des efforts  $\lambda_b$  :

$$\begin{aligned} & \left[ A^{(2)} t^{(2)} K^{(2)+} t^{(2)T} A^{(2)T} - A^{(1)} t^{(1)} K^{(1)-1} t^{(1)T} A^{(1)T} \right] \lambda_b \\ & + A^{(2)} t^{(2)} R \cdot \alpha = \left[ A^{(1)} t^{(1)} K^{(1)-1} F^{(1)} - A^{(2)} t^{(2)} K^{(2)+} F^{(2)} \right] \end{aligned} \quad (3.31)$$

où encore de façon générale :

$$\begin{aligned} \sum_{(s)} \left( \left[ A^{(s)} t^{(s)} K^{(s)+} t^{(s)T} A^{(s)T} \right] \lambda_b + A^{(s)} t^{(s)} R^{(s)} \cdot \alpha \right) \\ = - \sum_{(s)} \left[ A^{(s)} t^{(s)} K^{(s)+} F^{(s)} \right] \end{aligned} \quad (3.32)$$

En introduisant les notations suivantes :

$$\begin{cases} S_d^{(s)} = t^{(s)} K^{(s)+} t^{(s)T} \\ b_d^{(s)} = t^{(s)} K^{(s)+} F^{(s)} \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} S_d = \sum_{(s)} A^{(s)} S_d^{(s)} A^{(s)T} \\ b_d = \sum_{(s)} A^{(s)} b_d^{(s)} \end{cases} \quad (3.33)$$

$S_d$  étant le complément de Schur dual global et  $b_d$  le vecteur des déplacements générés par les efforts condensés aux interfaces. Le système complet (3.32), en approche duale, accompagné de l'équation d'orthogonalité (3.30) s'écrit :

$$\begin{bmatrix} S_d & G \\ G^T & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \lambda_b \\ \alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -b_d \\ -e \end{bmatrix} \quad (3.34)$$

où on désigne les termes  $G$  et  $e$  de notre problème à deux sous-domaines par :

$$\begin{cases} G = A^{(2)} t^{(2)} R \\ e^T = F^{(2)T} R \end{cases} \quad (3.35)$$

Dans ce système, le second bloc ligne, qui fait référence à l'équation (3.30), est un problème de faible dimension, dit grossier, posé sur l'ensemble des interfaces. La résolution de cette contrainte d'admissibilité peut s'effectuer par un algorithme de gradient projeté, faisant intervenir une condition d'initialisation des efforts  $\lambda_0$  ainsi qu'un projecteur  $P$  sur  $\text{Ker}(G^T)$  qui assure la recherche des réactions dans l'espace des modes rigides (cf [38]). Ainsi, dans le même temps qu'on résout le problème de décomposition de domaine, le champ des réactions  $\lambda_b$  est aussi contraint pour tenir compte des mouvements de corps rigides. Ainsi, à chaque itération  $k$ , on assure la recherche dans le bon espace (3.36) sous les conditions (3.37, 3.38) :

$$\lambda_b = \lambda_0 + P\lambda^k \quad (3.36)$$

$$G^T \lambda_0 = -e \quad (3.37)$$

$$G^T P = 0 \quad (3.38)$$

### 3.2.3 Préconditionneurs liés aux approches

Le développement des approches de décomposition de domaine est directement relié à la recherche d'exploitation des performances des architectures parallèles pour effectuer du calcul intensif. Le problème global est divisé en sous-problèmes, puis condensé au niveau des interfaces. La résolution du problème d'interface est réalisée par un algorithme itératif qui ne factorise pas les raideurs d'interfaces. La performance de ces solveurs itératifs dépend fortement du conditionnement des opérateurs d'interfaces ainsi générés. En pratique, il est essentiel de preconditionner les problèmes d'interfaces. Afin d'optimiser le conditionnement du système (3.39), on utilise un preconditionneur  $\tilde{S}$  pour modifier le système tel que :

$$Sx = b \quad \rightarrow \quad \tilde{S} Sx = \tilde{S} b \quad (3.39)$$

Du point de vue des approches de décomposition de domaine, un "bon" preconditionneur doit autant que possible être issu d'un assemblage d'opérateurs locaux, relatifs aux sous-domaines, afin de limiter les coûts de factorisation. Il existe deux types de preconditionneurs :

1. les preconditionneurs dits optimaux, valables pour les deux approches, s'apparentent à l'inverse d'un complément de Schur d'interface assemblé par une somme pondérée des

inverses des contributions locales. Ces préconditionneurs notés  $\widetilde{S}_p^{-1}$  pour l'approche primale et  $\widetilde{S}_d^{-1}$  pour l'approche duale sont définis comme suit :

$$\widetilde{S}_p^{-1} = \sum_{(s)} W^{(s)} A^{(s)} S_d^{(s)} A^{(s)T} W^{(s)T} \quad (3.40)$$

$$\widetilde{S}_d^{-1} = \sum_{(s)} W^{(s)} A^{(s)} S_p^{(s)} A^{(s)T} W^{(s)T} \quad (3.41)$$

Cette somme d'opérateurs locaux utilise des matrices diagonales de pondération  $W^{(s)}$  qui permettent de donner plus ou moins d'importance à un sous-domaine. Ces matrices jouent généralement un rôle important dans les performances du préconditionneur, puisqu'elles permettent de respecter les propriétés mécaniques. Dans le cas d'un raccordement entre structures homogènes, elles sont généralement égales à l'inverse de la multiplicité du degré de liberté d'interface considéré (dans notre cas  $\frac{1}{2}$  puisqu'il n'y a pas de point triple), telle qu'un terme de cette matrice soit défini par :

$$W_j^{(s)} = \frac{K_{jj}^{(s)}}{\sum_{(s)} K_{jj}^{(s)}} \quad (3.42)$$

Les préconditionneurs optimaux présentent l'avantage d'approcher au mieux l'opérateur d'interface à l'aide de calculs locaux. Cependant, ils occasionnent des coûts de calcul conséquents. Des préconditionneurs allégés ont été développés, mais uniquement pour l'approche duale.

2. Afin de limiter le coût des calculs, les opérateurs allégés ne prennent en compte qu'une approximation du comportement du sous-domaine, sous-jacent. Le premier, dit *lumped*, ne prend en compte que les degrés de liberté de l'interface et néglige les contributions dues aux degrés de liberté intérieurs. Il est défini par (3.43). Le second, nommé *super-lumped*, simplifie le premier en ne tenant pas compte de l'interdépendance des degrés de liberté d'interface. Il est défini par (3.44).

$$\left(\widetilde{S}_d^{-1}\right)_L = \sum_{(s)} W^{(s)} A^{(s)} K_{bb}^{(s)} A^{(s)T} W^{(s)T} \quad (3.43)$$

$$\left(\widetilde{S}_d^{-1}\right)_{SL} = \sum_{(s)} W^{(s)} A^{(s)} \text{diag}(K_{bb}^{(s)}) A^{(s)T} W^{(s)T} \quad (3.44)$$

Remarque :

Dans le cas d'une approche primale préconditionnée, le préconditionneur optimal utilise le complément de Schur dual local  $S_d^{(s)}$ . Or, cet opérateur est issu d'un problème de Neumann mal posé s'il n'y a pas suffisamment de conditions de Dirichlet. Il existe des méthodes pour redresser cette situation (cf [47]) qui permettent de rendre l'approche primale très efficace.

### 3.3 Résolution de systèmes mixtes Arlequin

En reprenant l'analyse des approches de décomposition de domaine, il est possible d'appliquer ce type de raisonnement à un système Arlequin (2.64) rappelé ici :

$$\begin{bmatrix} K^{(0)} & 0 & \Pi_0 C^T \\ 0 & K^{(1)} & -\Pi_1 C^T \\ C \Pi_0 & -C \Pi_1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U^{(0)} \\ U^{(1)} \\ \Lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F^{(0)} \\ F^{(1)} \\ 0 \end{bmatrix}$$

Ce système complet possède un découpage naturel en sous-domaines (2.45) qui peut s'écrire :

$$\begin{bmatrix} K^{(0)} & \Pi_0^T C^T \\ C \Pi_0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U^{(0)} \\ \Lambda^{(0)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F^{(0)} \\ R_\Lambda^{(0)} \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} K^{(1)} & -\Pi_1^T C^T \\ -C \Pi_1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U^{(1)} \\ \Lambda^{(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F^{(1)} \\ R_\Lambda^{(1)} \end{bmatrix} \quad (3.45)$$

Avec comme conditions de raccord :

$$\Lambda^{(0)} = \Lambda^{(1)} = \Lambda \quad \text{Sur} \quad \mathcal{S}_c \quad (3.46)$$

$$R_\Lambda^{(0)} + R_\Lambda^{(1)} = 0 \quad \text{Sur} \quad \mathcal{S}_c \quad (3.47)$$

Dans notre cas, l'interface est volumique et recouvrante (en comparaison aux interfaces surfaciques rencontrées en décomposition de domaine sans recouvrement). Pour un problème de type Arlequin, le système est établi en fonction des inconnues primales d'interface  $\Lambda$ . Pour la résolution, les sous-problèmes (3.45) sont condensés au niveau de l'interface  $\Omega_{1c}$  en une équation posée en fonction des inconnus uniques de liaison  $\Lambda$ . Il est, aussi, possible d'avoir une seconde approche en condensant le problème aux interfaces et en posant une équation en fonction des inconnues dualisées  $R_\Lambda$ , cependant elle apparaît moins naturelle que la première approche qui possède un sens physique plus fort. En outre, difficulté supplémentaire, la condensation à l'interface en inconnue dualisée requiert la factorisation d'un opérateur dense qui s'avère extrêmement coûteux voir quasi impossible à obtenir à l'aide de nos solveurs creux directs multifrontaux (c'est aussi cette difficulté qui nous conduira à abandonner l'utilisation des préconditionneurs optimaux dans la résolution itérative du problème aux interfaces, comme nous le verrons par la suite). En conséquence, seule l'approche en fonction de multiplicateur  $\Lambda$  est présentée par la suite, dans le cadre d'une formulation par décomposition de domaine Arlequin.

#### 3.3.1 Problème aux interfaces Arlequin

Pour obtenir le système, en fonction des seules inconnues  $\Lambda$ , commençons par écrire le déplacement de chaque sous-domaine à l'aide de la première ligne de chaque sous-système (3.45) :

$$\begin{cases} U^{(0)} = K^{(0)-1} [F^{(0)} - \Pi_0^T C^T \Lambda] \\ U^{(1)} = K^{(1)+} [F^{(1)} + \Pi_1^T C^T \Lambda] + B \cdot \alpha \\ C \Pi_0 U^{(0)} - C \Pi_1 U^{(1)} = 0 \end{cases} \quad (3.48)$$



Dans notre cas (cf chapitre 2), le problème interne issu du patch (1) n'est pas parfaitement défini. Ainsi, comme dans l'équation de condition d'orthogonalité (3.29), la construction d'une base du noyau  $\text{Ker}(K^{(1)})$ ,  $B$ , ainsi que la recherche d'un vecteur d'amplitude des mouvements de modes rigides  $\alpha$  est nécessaire. La condition d'admissibilité associée s'écrit :

$$B^T [F^{(1)} + \Pi_1^T C^T \Lambda] = 0 \quad (3.49)$$

$K^{(1)+}$  représentant la pseudo-inverse de la matrice de rigidité du domaine patch dont le noyau est de mesure non nulle lorsque les conditions de Dirichlet ne sont pas suffisantes. La condition d'admissibilité est établie à partir des propriétés d'orthogonalités avec la base  $B$  du noyau. Le déplacement extrait peut être remplacé dans les secondes lignes de chaque sous-domaine (3.45) :

$$\begin{cases} (C \Pi_0 K^{(0)-1} \Pi_0^T C^T) \Lambda = C \Pi_0 K^{(0)-1} F^{(0)} - R_\Lambda^{(0)} \\ (C \Pi_1 K^{(1)+} \Pi_1^T C^T) \Lambda = -C \Pi_1 K^{(1)+} F^{(1)} - C \Pi_1 B \alpha - R_\Lambda^{(1)} \end{cases} \quad (3.50)$$

Les compléments de Schur de chaque domaine  $S^{(s)}$ , ainsi que les seconds membres  $b^{(s)}$  s'écrivent alors :

$$\begin{cases} S^{(0)} = C \Pi_0 K^{(0)-1} \Pi_0^T C^T \\ S^{(1)} = C \Pi_1 K^{(1)+} \Pi_1^T C^T \end{cases} \quad \begin{cases} b^{(0)} = C \Pi_0 K^{(0)-1} F^{(0)} - R_\Lambda^{(0)} \\ b^{(1)} = -C \Pi_1 K^{(1)+} F^{(1)} - R_\Lambda^{(1)} \end{cases} \quad (3.51)$$

En substituant les équations précédentes (3.50) dans la dernière équation du système (3.50) qui traduit les conditions de raccord à l'interface. En tenant compte des conditions de raccord (3.46,3.47) et des conditions liées aux modes rigides, il est possible d'écrire le système global en fonction du champ de multiplicateur  $\Lambda$  et du vecteur d'amplitude des mouvements de corps rigides  $\alpha$ , sous la forme suivante :

$$\begin{bmatrix} S & G \\ G^T & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Lambda \\ \alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -b \\ -e \end{bmatrix} \quad (3.52)$$

avec pour composants :

$$\begin{cases} S = (S^{(0)} + S^{(1)}) \\ b = -(b^{(0)} + b^{(1)}) \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} G = [C \Pi_1 B] \\ e = [B^T F^{(1)}] \end{cases} \quad (3.53)$$

On constate que cette écriture ressemble au système obtenu dans le cadre d'une approche de décomposition de domaine duale (3.34).

Pour résoudre ce problème, une démarche itérative est classiquement utilisée sur le modèle des approches de décomposition de domaine. Le complément de Schur, agissant dans l'équation (3.52), est composé de l'assemblage des opérateurs (3.51), lui conférant ainsi une propriété d'opérateur symétrique défini positif (dans la mesure d'opérateurs locaux symétriques définis positifs). On se propose de mettre en application un solveur de type gradient conjugué pour résoudre le problème complet. La présence éventuelle de modes rigides nous

conduit à rechercher une solution  $\Lambda$  projetée dans un espace orthogonal à  $G$ , ce qui agit directement comme un problème grossier et peut grandement améliorer la convergence de la méthode de résolution itérative. Ainsi, pour la condition d'admissibilité :

$$G^T \Lambda = -e \quad (3.54)$$

On introduit le champ de multiplicateur de la même façon que l'équation (3.36) relative à un algorithme projeté. Ainsi, à chaque itération, on utilise un projecteur pour s'assurer que la recherche des inconnues  $\Lambda$  s'effectue dans le bon espace :

$$\begin{aligned} \Lambda &= \Lambda_0 + P \Lambda^k \\ G^T P &= 0 \end{aligned} \quad (3.55)$$

ce qui conduit à établir pour les différents paramètres, dans le cas de structures homogènes, comme condition d'initialisation et comme projecteur :

$$\Lambda_0 = -G(G^T G)^{-1} e \quad (3.56)$$

$$P = I - G(G^T G)^{-1} G^T \quad (3.57)$$

Avec l'équation de problème grossier (3.55) et ses composants bien définis (3.56,3.57), l'évaluation de la convergence s'effectue par la mesure du résidu projeté du problème d'interface  $r$  défini par :

$$r = P^T (-b - S \Lambda) \quad (3.58)$$

### 3.3.2 Étude des préconditionneurs associés

Un des intérêts majeurs des approches par décomposition de domaine, utilisant une méthode de résolution itérative du problème d'interface, tient à l'existence de préconditionneurs efficaces qui permettent d'améliorer significativement la convergence de la méthode et de la rendre extensible.

Dans ce cadre, un préconditionneur efficace est un opérateur d'interface qui fournit une bonne approximation de l'inverse du complément de Schur global, construit à l'aide d'un assemblage d'opérateurs locaux. Dans la démarche de calcul distribué, un tel préconditionneur doit aussi requérir un minimum d'échanges entre les sous-domaines. Ainsi, d'une manière équivalente aux préconditionneurs des approches de décomposition de domaine (3.40,3.41), il est possible d'écrire un préconditionneur optimal à partir des opérateurs de Schur locaux :

$$\tilde{S}^{-1} = \sum_{(s)} W^{(s)} S^{(s)+} W^{(s)T} = W^{(0)} S^{(0)+} W^{(0)T} + W^{(1)} S^{(1)+} W^{(1)T} \quad (3.59)$$

Pour un problème Arlequin où, dans la zone de collage, les deux modèles mélangés doivent posséder le même type de comportement, les opérateurs  $W^{(0)}$ ,  $W^{(1)}$  sont évalués égaux à la matrice identité divisée par l'ordre de multiplicité de chacune des inconnues. Soit dans le cadre d'un raccord entre deux domaines, ces matrices de pondérations sont égales à  $\frac{1}{2} I_d$ .

Cependant, le problème principal de ce préconditionneur tient au fait que, pour l'évaluer, il serait nécessaire de calculer la pseudo-inverse des compléments de Schur :

$$S^{(s)+} = (C \Pi_s K^{(s)+} \Pi_s^T C^T)^+ \quad (3.60)$$

La principale difficulté tient dans sa structure dense alors que sa dimension demeure liée au nombre de degrés de liberté d'interface. Or, d'une part les solveurs creux utilisés dans les codes éléments finis ont énormément de difficultés à anticiper cette situation, lors de la factorisation symbolique et rencontrent ainsi beaucoup de difficultés de gestion mémoire, et d'autre part l'existence elle-même d'un tel opérateur dense est extrêmement problématique, puisqu'il peut être nécessaire de factoriser un opérateur dense dont la taille peut aisément atteindre plus de  $10^4$  inconnues.

Ces difficultés d'utilisation de l'opérateur optimal nécessitent de trouver un opérateur plus fonctionnel et moins coûteux. Plusieurs constatations peuvent être menées sur un tel problème : la première est liée à la nature du couplage volumique  $\mathcal{H}^1$  dont les propriétés sont théoriquement de produire un opérateur de couplage mieux conditionné que ceux obtenus lors de décompositions sans recouvrement (comme nous le verrons par la suite). La seconde est liée à la nature de l'opérateur de couplage  $C$ , défini sur le maillage intermédiaire, selon le type de formulation choisie. En effet, lorsqu'aucun terme  $\mathcal{L}^2$  n'est présent dans cet opérateur, il possède une structure très proche de celle d'un opérateur de rigidité. Dans ces conditions, en suivant les préconisations de N. Elkhodja, il est possible de proposer l'approximation suivante pour l'inverse du complément de Schur local :

$$\widetilde{S^{(s)+}} = C^+ \quad (3.61)$$

Cette approximation propose d'utiliser l'opérateur de couplage  $C$  qui peut être inversible si l'on fait, par exemple, le choix d'utiliser une formulation sans terme  $\mathcal{L}^2$  avec utilisation d'une couronne pour annuler le noyau de  $C$ . En pratique, cette simplification est rendue possible par la similarité importante entre la structure de l'opérateur de couplage  $C$  en rigidité et  $\Pi_s K^{(s)+} \Pi_s^T$ , qui peut être vu comme un opérateur de souplesse lié à la structure sous-jacente projetée sur la zone de collage. Le préconditionneur allégé retenu est alors défini par :

$$\tilde{S}^{-1} = \sum_{(s)} W^{(s)} C^{-1} W^{(s)T} = W^{(1)} C^{-1} W^{(1)T} + W^{(2)} C^{-1} W^{(2)T} \quad (3.62)$$

### 3.3.3 Résolution parallèle de façon itérative

Dans le but de répondre au besoin d'accélérer la résolution, on désire utiliser les architectures dédiées au calcul parallèle. Pour résoudre le système Arlequin de façon itérative, on utilise la généralisation des solveurs de décomposition de domaines pour des interfaces volumiques non compatibles, dues aux différences de maillages. La résolution du problème décomposé s'effectue entre interfaces conformes puisque, dans notre mise en œuvre, une copie du maillage intermédiaire est réalisée puis distribuée à chaque sous-domaine. L'incompatibilité des maillages n'est présente que dans les sous-domaines (entre le maillage du modèle intermédiaire et le maillage du modèle substrat, par exemple). La résolution s'effectue alors sur un problème de décomposition de domaine avec interfaces volumiques conformes par un solveur de Krylov ainsi que des préconditionneurs adaptés.

Cette démarche de résolution a été intégrée au sein du code Z-Set/ZéBuLoN. En pratique, il s'agit essentiellement de modifications, dans le module de décomposition de domaine développé principalement par P. Gosselet, pour l'adapter aux particularités des problèmes Arlequin et permettre l'utilisation de décomposition de domaine avec recouvrement et de raccords volumiques entre patchs, afin de tirer parti au mieux de calculateurs parallèles.

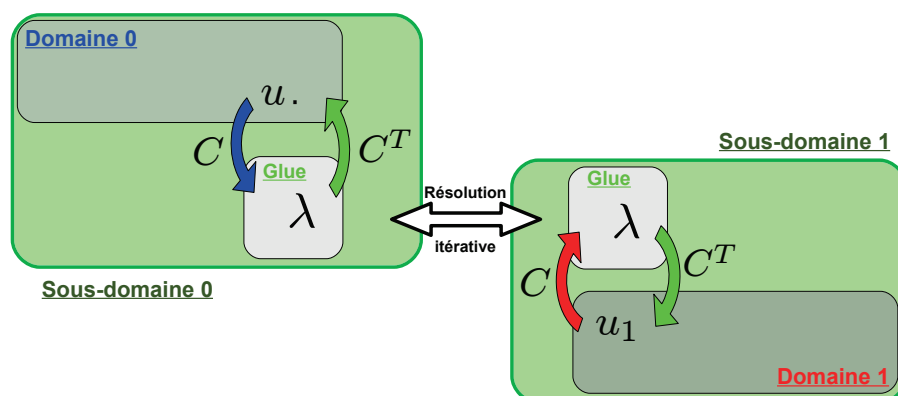


Figure 3.2 — Principe de la décomposition de domaine dans le cadre de la méthode Arlequin.

La résolution utilise un solveur itératif de Krylov, de type gradient conjugué au niveau global. Les résolutions locales sont toujours réalisées par le solveur direct MUMPS. L'algorithme mis en œuvre est détaillé dans l'algorithme (3.1).

---

**Algorithme 3.1** Résolution itérative préconditionnée, par gradient conjugué réorthogonalisé, d'un problème Arlequin en décomposition de domaine.

---

```

1:  $I - G (G^T G)^{-1} G^T \rightarrow P$ 
2:  $-G (G^T G)^{-1} f \rightarrow \Lambda$ 
3:  $P^T (-b - S\Lambda) \rightarrow r$ 
4:  $P C^{-1} r \rightarrow w$ 
5: tant que  $\|r\|/\|f\| > \varepsilon$  faire
6:    $P^T S w \rightarrow p$ 
7:    $(w, r)/(p, w) \rightarrow a$ 
8:    $\Lambda + a w \rightarrow \Lambda$ 
9:    $r - a p \rightarrow r$ 
10:   $P C^{-1} r \rightarrow w$ 
11:  pour  $i = 0$  à  $k$  faire
12:     $-\frac{(r, p_i)}{(w_i, p_i)} \rightarrow \beta_i$ 
13:  fin pour
14:   $w + \sum_{i=0}^k \beta_i w_i \rightarrow w$ 
15: fin tant que
16:  $(G^T G)^{-1} G^T r \rightarrow \alpha$ 
17:  $K^{(0)+} (F^{(0)} - \Pi_0^T C^T \Lambda) + B^{(0)} \alpha^{(0)} \rightarrow U^{(0)}$ 
18:  $K^{(1)+} (F^{(1)} + \Pi_1^T C^T \Lambda) + B^{(1)} \alpha^{(1)} \rightarrow U^{(1)}$ 

```

---

### 3.4 Validation des performances

#### 3.4.1 Cas d'une plaque percée tridimensionnelle

Pour valider et évaluer les performances de la résolution parallèle, on reprend le cas de la plaque percée, déjà calculée au chapitre 2, mais traitée, ici, en trois dimensions par extrusion d'une section plane selon la direction  $z$ . On veut simuler le cas d'une plaque percée, sollicitée en traction. La section plane de la plaque est carrée de  $200mm$  de côté et son épaisseur est de  $10mm$ . Elle comporte un perçage dont la section plane est de  $2mm$  de diamètre, situé au centre de la plaque. Deux faces opposées au bord, de normales  $\vec{e}_2$  et  $-\vec{e}_2$ , sont soumises à des déplacements donnés, égaux en modules et opposés en sens. Les autres faces du bord sont libres, de même que la frontière délimitant le trou (cf figure 3.3).

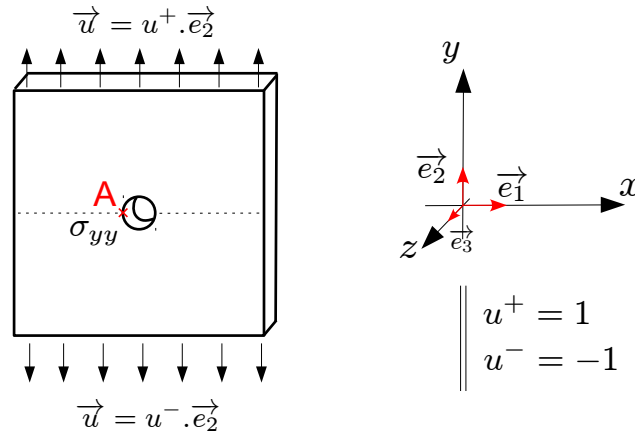


Figure 3.3 — Schéma de modélisation d'une plaque percée en trois dimensions.

On continue d'adopter les hypothèses de petites perturbations, on suppose que le matériau constituant est élastique homogène et isotrope, de module d'Young  $E = 2 \times 10^5 \text{MPa}$  et de coefficient de Poisson  $\nu = 0,3$ .

Pour la modélisation de ce problème dans le cadre Arlequin, la plaque sans perçage est représentée par un modèle substrat élastique ayant une discrétisation régulière de type grille. Cette grille est composée de  $32 \times 32 \times 1 = 1024$  briques, toutes identiques de type tri-linéaire avec 8 nœuds (élément C3D8). Le perçage est intégré localement par un patch, ayant un comportement élastique et linéaire, de section carrée de  $20mm$  de côté et ayant  $10mm$  d'épaisseur avec une discrétisation triangulaire de Delaunay extrudée, raffinée en bord de perçage. Cette discrétisation est constituée de 630 éléments quadratiques prismes avec 15 nœuds, isoparamétrique (élément C3D15). Comme pour le cas de la plaque percée en 2D du chapitre 2 (cf section 2.5.1), la zone de collage du patch ainsi que celle du maillage intermédiaire sont constituées d'éléments briques tri-linéaires. La partie libre du maillage intermédiaire, ne servant que pour la pondération, n'est représentée que par deux prismes, puisqu'il n'est pas nécessaire d'avoir une description précise.

Pour ce cas test, le solveur itératif employé est de type gradient conjugué avec MUMPS pour solveur local direct, qui est capable de détecter les modes rigides, éventuellement présents. Dans notre simulation, le problème est décomposé en deux sous-domaines : le premier est constitué du substrat et du maillage d'interface alors que le second est constitué du patch

et d'une copie du maillage d'interface. Ainsi, la résolution peut s'effectuer sur deux cœurs de calcul. Si la résolution itérative est préconditionnée, on emploie l'opérateur allégé, basé sur l'opérateur de collage énergétique avec blocage des modes rigides à l'aide d'une ou deux couronnes. Pour évaluer les différentes performances en résolution itérative, les résultats sont présentés par des courbes de convergence du résidu normalisé obtenu par un gradient conjugué, en fonction du nombre d'itérations.

Pour notre première comparaison, il s'agit de voir l'impact du choix de l'opérateur de couplage sur le nombre d'itérations, à convergence. Les résultats sont donnés sur la figure (3.4).

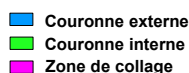
Résidu normalisé  
du Gradient conjugué

**Figure 3.4** — Comparaison des différents types de couplage sur la convergence d'un calcul parallèle.

On peut, dans un premier temps, observer qu'un couplage de type  $\mathcal{H}^1$  converge bien plus rapidement qu'un couplage de type  $\mathcal{L}^2$ . Cela confirme que l'opérateur de couplage  $\mathcal{H}^1$  fournit un problème bien mieux conditionné. Ensuite, on peut constater que la convergence avec un opérateur de type énergétique est plus rapide que celle obtenue avec un opérateur de type  $\mathcal{H}^1$ , mais sans nécessiter un paramètre de longueur caractéristique. Ces conclusions avaient déjà été établies pour des raccords compatibles, dans les travaux de N. Elkhodja [37], et ces résultats démontrent qu'elles restent vraies pour des couplages de maillages incompatibles. La résolution itérative avec l'opérateur énergétique, dont le blocage des modes rigides est réalisé avec une couronne extérieure, est similaire à la convergence avec un opérateur de type  $\mathcal{H}^1$ . En opposition, les convergences, pour les opérateurs énergétiques avec blocage par une couronne l'une intérieure ou deux couronnes, l'une intérieure et l'autre extérieure, sont analogues et deux fois plus rapide qu'avec l'opérateur énergétique avec couronne extérieure. Lorsque la résolution est préconditionnée, à l'aide du préconditionneur allégé, le nombre d'itérations pour atteindre la convergence est encore réduit pour les opérateurs énergétiques. Cette amélioration est d'un facteur 2, sur le nombre d'itérations sans préconditionnement,

dans notre cas test. On constate que la meilleure convergence est obtenue avec le blocage des modes rigides par couronne intérieure. La résolution itérative préconditionnée, pour l'opérateur énergétique avec couronne intérieure, donne une convergence accélérée par un facteur 9, par rapport à une résolution itérative avec un opérateur  $\mathcal{L}^2$ . Maintenant que l'opérateur de couplage énergétique avec utilisation d'un préconditionneur allégé semble tout à fait satisfaisante, la suite des essais consiste à étudier les influences de certains paramètres de la méthode sur les performances.

On commence, tout d'abord, par faire varier la taille de la zone de collage, puis on valide l'utilisation d'un préconditionneur et l'impact du type de pondération. Ainsi, identiquement au premier cas test du chapitre 2, la taille de la zone de collage varie de une, deux, quatre à huit couches d'éléments (cf figures 3.5).



**Figure 3.5** — Augmentation de la taille de la zone de collage : 1, 2, 4 et 8 couches.

Pour étudier ces différentes influences, on réalise quatre simulations différentes. Pour ces comparaisons, on trace les courbes correspondant aux quatre cas d'augmentation de la zone de collage. Pour les deux premières comparaisons, on effectue une résolution itérative non préconditionnée, et pour les deux dernières, on utilise un préconditionneur allégé. Pour ces deux cas de résolutions, on a recours à une pondération de types continue ou constante.

Pour le cas d'une résolution sans utiliser de préconditionneur (cf figures 3.6,3.7), on constate que le nombre d'itérations, nécessaire à la convergence, augmente lorsque la taille de la zone de collage et donc le nombre d'inconnus augmente. Pour une zone de collage assez petite, le type de fonction de pondération n'affecte pas le nombre d'itérations. Cependant, lorsque cette zone augmente, les simulations utilisant des fonctions de pondération continues nécessitent un plus grand nombre d'itérations pour la convergence. Ainsi, l'utilisation d'une fonction de pondération constante a moins d'influence sur le nombre d'itérations requis lorsque la taille de la zone de collage croît. Pour le cas d'une résolution itérative employant un préconditionneur (cf figures 3.8,3.9), le premier constat est que l'amélioration du conditionnement est probante. En effet, il permet une diminution du nombre d'itérations par un facteur allant de 2 à 5. Dans le cas de l'utilisation de fonctions de pondération continues, les influences de la taille de la zone de collage est semblable à celle constatée sans préconditionnement. Cependant, une observation intéressante mérite mention pour le cas d'utilisation d'une fonction de pondération constante. En effet, quelle que soit la taille de la zone de collage et donc le nombre d'inconnues du champ discret de collage, on constate que le nombre d'itérations reste constant pour atteindre la convergence.



Résidu normalisé du  
Gradient conjugué

Résidu normalisé du  
Gradient conjugué

**Figure 3.6** — Influence de la taille de la zone de collage sur le nombre d'itérations (pondération continue avec résolution itérative non préconditionnée).

**Figure 3.7** — Influence de la taille de la zone de collage sur le nombre d'itérations (pondération constante de 0,5 avec résolution itérative non préconditionnée).

Si on se base sur l'étude de l'erreur définie au chapitre précédent, alors, une seule couche d'éléments est nécessaire à l'obtention d'une solution de bonne qualité. Afin de vérifier l'extensibilité de la méthode sur un cas incompatible tridimensionnel, on fait varier le nombre

Résidu normalisé du  
Gradient conjugué

**Figure 3.8** — Influence de la taille de la zone de collage sur le nombre d'itérations (pondération continue avec résolution itérative préconditionnée).

Résidu normalisé du  
Gradient conjugué

**Figure 3.9** — Influence de la taille de la zone de collage sur le nombre d'itérations (pondération constante de 0,5 avec résolution itérative préconditionnée).

d'éléments utilisés pour discrétiser l'épaisseur de la structure. Ainsi, pour une valeur de  $p$ , le nombre d'éléments intervenant dans l'épaisseur du maillage du modèle plaque, le nombre d'éléments dans l'épaisseur du maillage patch est de  $2 * p + 1$ .

Résidu normalisé du  
Gradient conjugué

Résidu normalisé du  
Gradient conjugué

**Figure 3.10** — Influence de l'incompatibilité dans l'épaisseur (pondération linéaire avec résolution itérative préconditionnée).

**Figure 3.11** — Influence de l'incompatibilité dans l'épaisseur (pondération constante de 0,5 avec résolution itérative préconditionnée).

Pour ces deux ensembles de courbes (cf figures 3.10,3.11), on remarque que le type de fonction de pondération influence peu le nombre d'itérations nécessaires à la convergence. De plus, quelle que soit la non-conformité entre les maillages substrat et patch, le système

est assez bien conditionné pour que le nombre d'itérations ne soit pas perturbé. En outre, l'augmentation considérable du nombre de degrés de liberté (jusqu'à 272 028 ddl dont 12 240 au niveau de l'interface) n'affecte pas le nombre d'itérations à convergence, ce qui témoigne d'une très bonne extensibilité de la méthode.

### 3.4.2 Cas multipatch de plaque percée tridimensionnelle

Afin d'illustrer l'intérêt de la résolution parallèle des systèmes Arlequin, on réalise une seconde simulation de plaque percée en trois dimensions mais avec, dans ce cas, cinq perçages de 2mm de diamètre. Les dimensions de la plaque et du patch restent identiques à celles du cas précédent. Pour représenter les perçages, on démultiplie le modèle patch, défini précédemment, ainsi que le modèle intermédiaire associé. On place ensuite les modèles de façon à avoir cinq perçages dont les sections planes sont centrées aux points de coordonnées  $([-30; 30], [-30; -30], [0; 0], [30; 30]$  et  $[30; -30])$ . On ne construit qu'un seul modèle patch avec son maillage intermédiaire associé que l'on reproduit et déplace afin de générer de nouveaux perçages.

La plaque est soumise à un déplacement imposé ( $u^+ = (0.5, 1., 2.)$ ) sur la face de normale  $\vec{e}_2$  et à un déplacement nul ( $u_0 = (0., 0., 0.)$ ) sur la face opposée de normale  $-\vec{e}_2$  (cf figure 3.12). L'ensemble des autres faces de bord, ainsi que les frontières des perçages, sont libres.

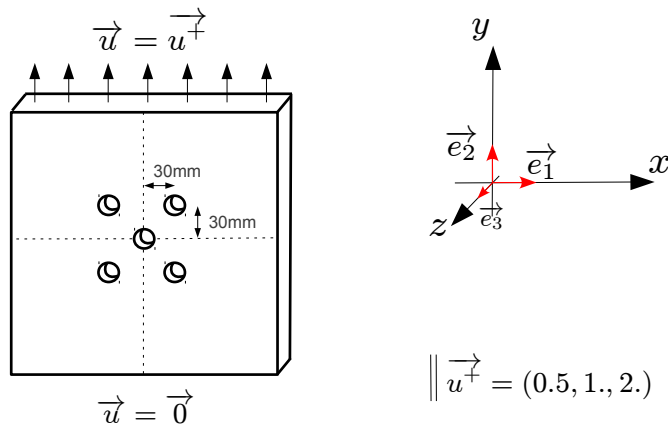


Figure 3.12 — Schéma de modélisation d'une plaque avec cinq perçages en trois dimensions.

Dans le cadre d'une modélisation Arlequin, le problème est représenté à l'aide d'un modèle substrat de plaque sans perçage et cinq patches, prenant en charge chacun des perçages. L'ensemble des éléments employés sont linéaires avec des éléments briques pour le maillage du modèle substrat et des éléments prismes pour le maillage de la zone libre du patch. La zone de couplage du patch ainsi que le maillage intermédiaire est construit par des éléments briques. On continue à adopter les hypothèses de petites perturbations et on suppose que le matériau constituant est élastique homogène et isotrope, de module d'Young  $E = 2 \times 10^5$  MPa et de coefficient de Poisson  $\nu = 0.3$ .

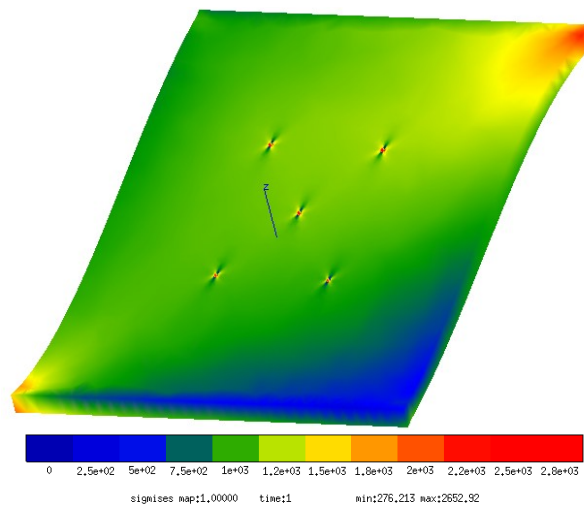
Pour cette simulation, l'idée est qu'elle soit effectuée à l'aide autant de processeurs de calcul que le nombre de sous-structures (soit six au total). Le problème possède 734 094 de-

grés de liberté dont 39 600 pour le collage. Les résultats de cette simulation sont visibles sur les figures des iso-contraintes présentes sur les maillages patchs (3.13(a)) et sur le maillage substrat (3.13(b)), qui coïncident avec les résultats obtenus par une modélisation monomodèle de référence avec des percages établis directement sur la plaque (cf figure 3.15). Cette modélisation de référence est constituée par des prismes tri-linéaires.

(a) Les maillages des différents patchs

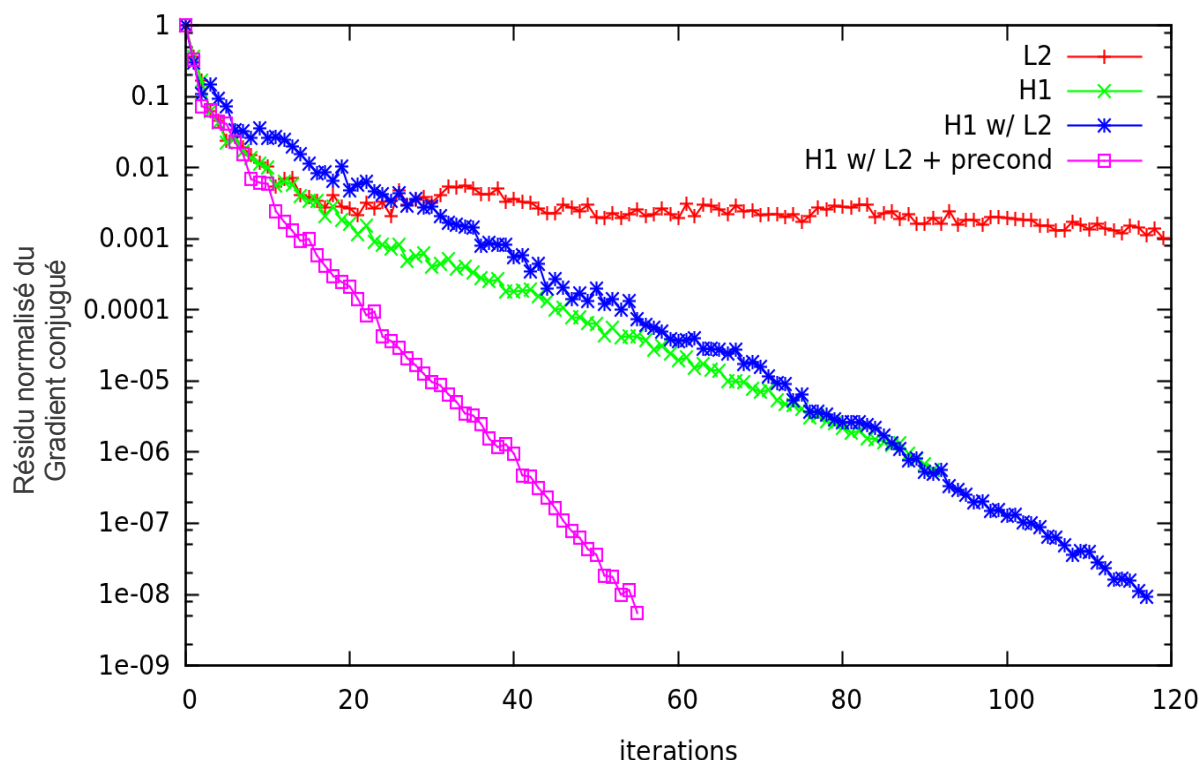
(b) Le maillage substrat

**Figure 3.13** — Iso-contraintes de Von-Mises sur un cas de traction-flexion 3D avec 5 patchs percés (amplifiées 30 fois).



**Figure 3.14** — Iso-contraintes de Von-Mises sur une modélisation référence d'un cas de traction-flexion en 3D (amplifiées 30 fois).

Les courbes de convergence (cf figure 3.15) montrent qu'un opérateur de couplage de type  $\mathcal{L}^2$  est moins performant qu'un opérateur de couplage de type  $\mathcal{H}^1$ . Cela nous permet de constater, une fois de plus, que cet opérateur  $\mathcal{H}^1$  produit un système global mieux conditionné. Pour cette simulation, l'opérateur énergétique délivre des performances identiques à une résolution avec un opérateur de type  $\mathcal{H}^1$ . L'utilisation d'un préconditionneur permet de conserver l'extensibilité de la méthode avec un nombre d'itérations à convergence de 55, qui



**Figure 3.15** — Influence des différents opérateurs de couplage dans le cas d'une simulation multipatch.

est justement un nombre voisin des résultats obtenus pour la simulation de problème avec un unique patch. Concernant les aspects de performances en temps, la résolution parallèle itérative est comparée à une résolution séquentielle multithreadée avec un nombre identique d'unités de calcul. La résolution est menée en 1727 secondes de façon séquentielle, avec un solveur direct multithreadé sur douze cœurs. Cette résolution est menée en 665 secondes, pour une décomposition en six domaines. L'utilisation du préconditionneur et un solveur local direct multithreadé sur deux cœurs, avec un gain en temps de facteur 2, 6, pour un nombre équivalent d'unités de calcul.

### 3.4.3 Étude d'une aube multiperforée avec 31 patches

Pour finir de valider les performances de la méthode Arlequin, on simule un problème ayant des caractéristiques industrielles. Il s'agit de modéliser et de simuler le comportement mécanique d'une aube turbine ; une des pièces les plus sollicitées dans un turboréacteur d'avion. Dans un moteur d'avion, on révèle différents types d'aube dont les caractéristiques thermo-mécaniques dépendent de leur localisation dans le turboréacteur (cf figure 3.16(a)). Nous avons choisi de nous intéresser au cas d'une aube à convection, située au niveau de la turbine haute pression (cf figure 3.16(b)). Ces aubes sont de faibles dimensions mais subissent de fortes sollicitations mécaniques et thermiques. Ainsi, alors que le pied de l'aube est encastré, la pale de celle-ci se dilate sous l'effet de forces centrifuges et de températures

pouvant atteindre 1000°C.

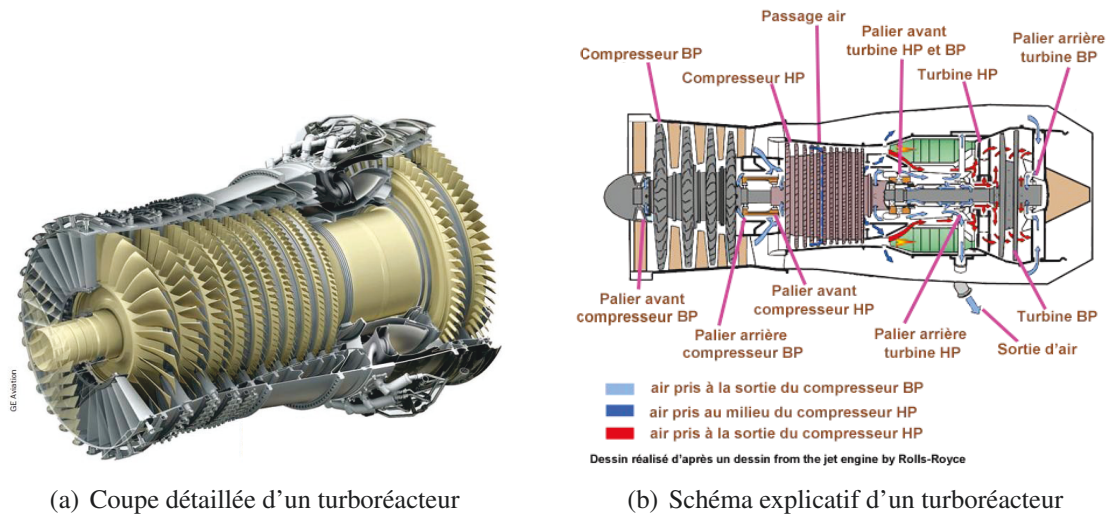
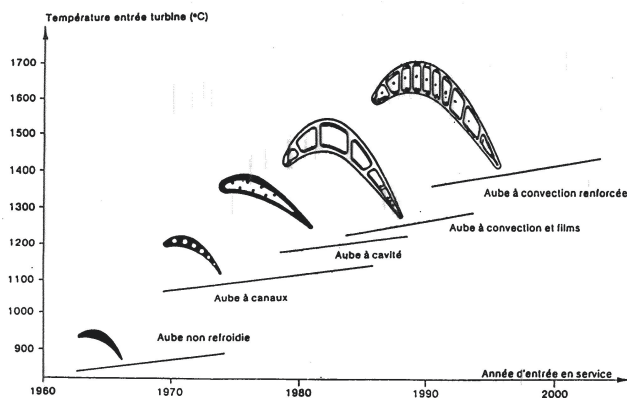
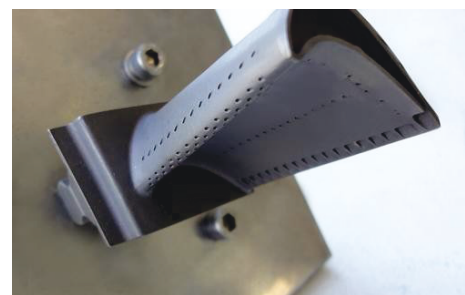


Figure 3.16 — Schéma d'un turboréacteur d'avion.

Une aube, de façon similaire à une aile, a une forme profilée afin d'accélérer l'écoulement des gaz chauds. Ainsi, avec le développement des performances des turboréacteurs, la température de ces gaz a augmentée, nécessitant le refroidissement de l'aube en fonctionnement afin de diminuer les contraintes thermiques et d'éviter son érosion rapide (cf figure 3.17(a)). Dans notre cas, on s'intéresse au cas d'une aube à convection, comportant des perçages au niveau du bord d'attaque (cf figure 3.17(b)).



(a) Évolution du design des aubes



(b) Aube avec perçages de refroidissement

Figure 3.17 — Modèle d'aube étudiée.

Une aube à convection est creuse, suite à la mise en place de canaux de refroidissement, et possède, généralement, des perçages sur le bord d'attaque afin de permettre la circulation d'un flux d'air froid à l'intérieur et l'extérieur de l'aube (cf figure 3.17(b)). Ainsi, l'air provenant du compresseur haute pression pénètre à l'intérieur de l'ailette, au niveau du pied, puis s'échappe par le bord d'attaque en créant un refroidissement par film protecteur sur l'extrados et l'intrados et par convection sur le bord de fuite (cf figure 3.18).

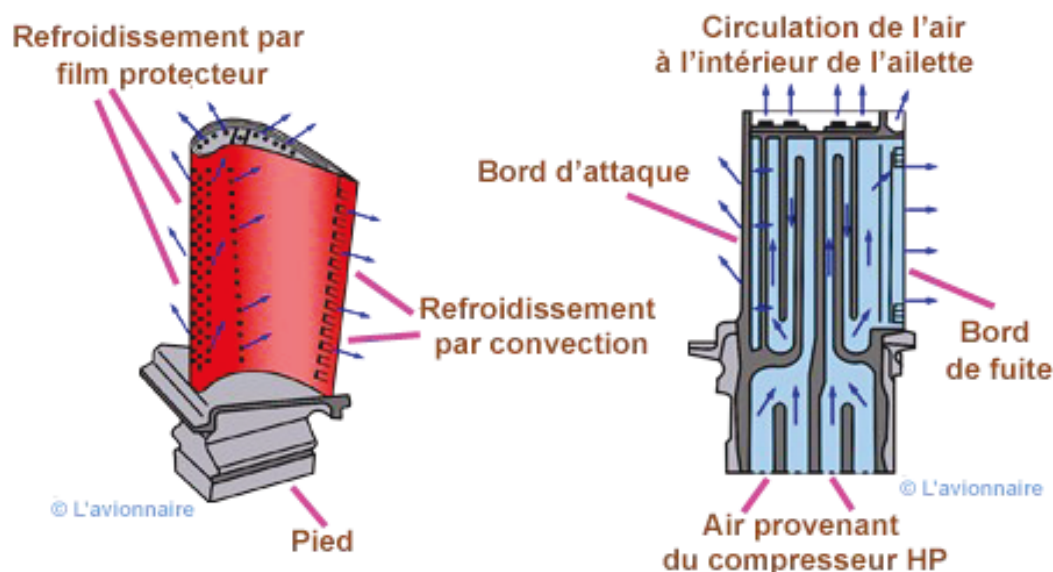


Figure 3.18 — Schéma d'explication du refroidissement d'une aube en fonctionnement.

Avec la méthode Arlequin, on propose, ici, de simuler le comportement statique d'une aube encastrée à sa base et soumise à un chargement de forces centrifuges, agissant dans la direction  $\vec{e}_3$ . Ce chargement est censé reproduire l'effort mécanique centrifuge auquel l'aube est soumise (cf figure 3.19). Pour des problèmes de droits et de propriétés industrielles, on ne traite qu'une version simplifiée de l'aube, sans le pied d'accrochage. Cette représentation de l'aube conserve une forme profilée, ainsi que ses canaux internes servant à son refroidissement. Dans notre cas, le modèle de l'aube est construit à partir de l'extrusion d'un profil, en deux dimensions, qui a été redessiné. On propose d'utiliser la méthode Arlequin afin d'insérer, dans une aube non percée, 31 perçages situés sur le bord d'attaque de l'aube (cf figure 3.19). L'apport de la modélisation Arlequin réside dans la possibilité d'insérer des maillages locaux servant à la représentation des perçages dans un maillage global non percée. La modélisation monomodèle du même problème est extrêmement difficile et requiert un temps conséquent, rien que pour la composition du modèle.

Dans le cadre de la modélisation par la méthode Arlequin, un modèle substrat représente l'aube sans perçage. Les dimensions de la section plane du modèle substrat sont d'environ  $265\text{mm}$  de long sur  $60\text{mm}$  de large. Cette section est extrudée sur une hauteur de  $320\text{mm}$  dans la direction  $\vec{e}_3$ . Le maillage de ce modèle est composé de 143 600 tétraèdres tri-linéaires (C3D4). Chaque perçage placé au niveau du bord d'attaque de l'aube, est incorporé dans un patch. Chaque patch est construit à l'aide de 3600 éléments tétraédriques  $\mathcal{P}1$ .

L'aube est sollicitée à l'aide de forces centrifuges selon la direction  $\vec{e}_3$ , imposées sur l'ensemble des modèles, avec un taux de rotation de  $2100\text{ rad/sec}$ . L'axe de rotation choisi est situé à la coordonnée  $(0., 0., -3000.)$ , pour représenter l'axe du disque qui portant l'aube. Les faces de l'aube sont libres de contraintes, à l'exception de la surface inférieure de direction  $\vec{e}_3$  où les déplacements sont nuls, pour représenter l'encastrement du pied de l'aube. On continue d'adopter les hypothèses de petites perturbations et on suppose que le matériau constituant est élastique homogène et isotrope, de module d'Young  $5 \times 10^5\text{MPa}$ , de coefficient de Poisson  $\nu = 0.3$  et de masse volumique  $7600\text{ kg/m}^3$ .



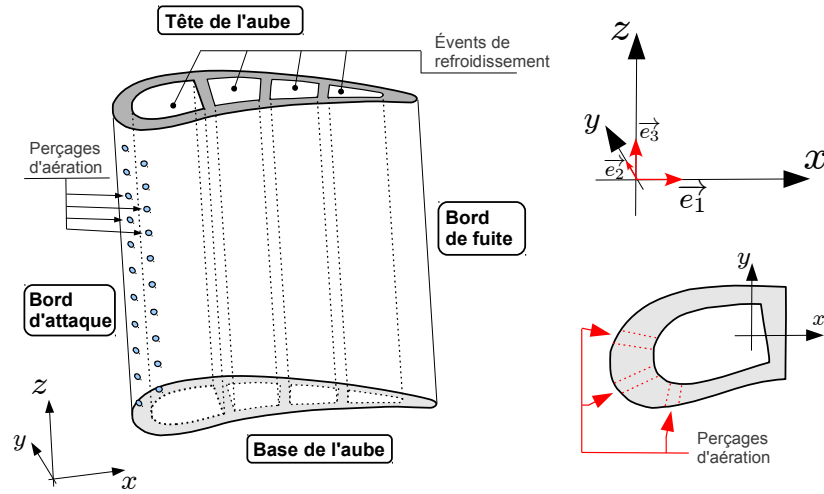


Figure 3.19 — Schéma de modélisation d'une aube simulacre avec 31 perçages d'aération sur le bord d'attaque.

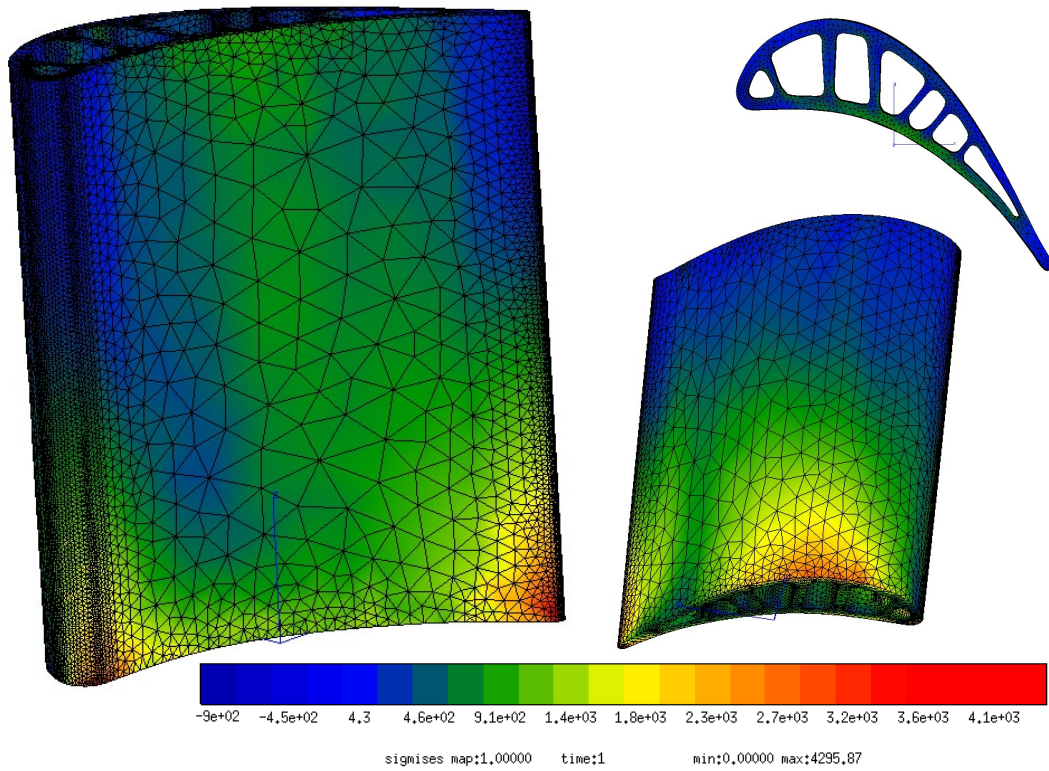


Figure 3.20 — Critère de Von-Mises en contraintes sur le modèle substrat.

En résultat, nous observons que le modèle substrat montre des zones de surcontraintes aux niveaux inférieurs du bord d'attaque et du bord de fuite (cf figure 3.20). Pour les modèles locaux, on constate que les réponses sont de même type. Ainsi, pour chaque patch, on montre deux zones de surcontraintes, localisées sur les bords du perçage (cf figures 3.21). Ce type de réponse est logique et s'apparente au cas d'un chargement en traction dans les directions opposées  $\vec{e}_3$  et  $-\vec{e}_3$ .

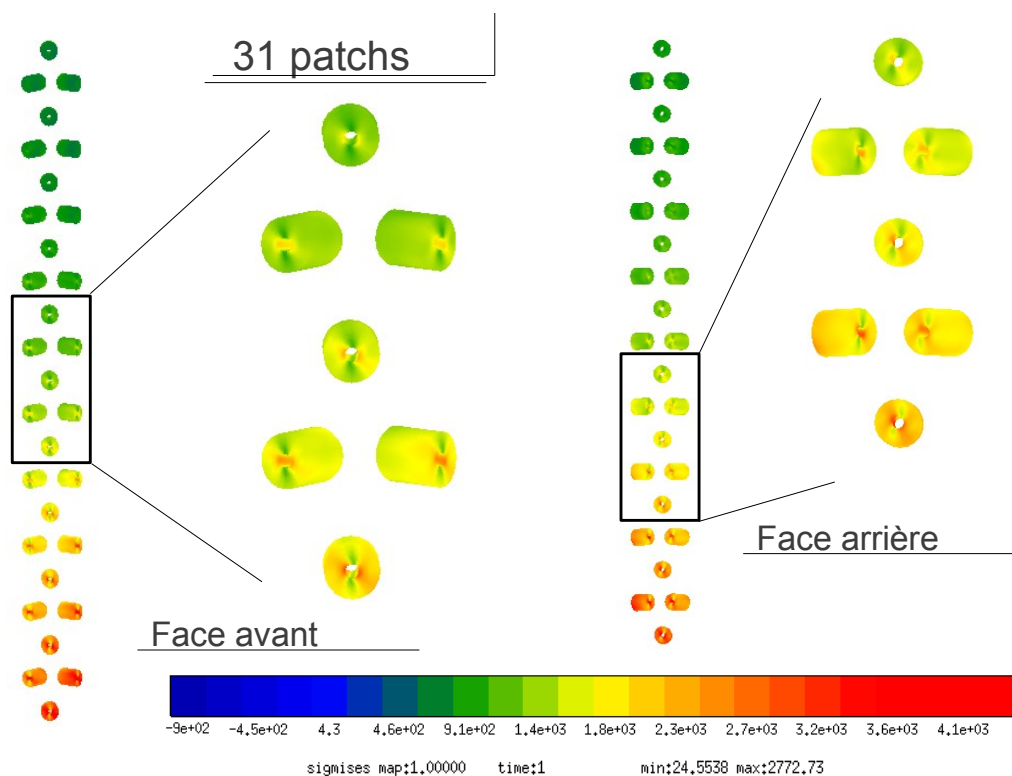


Figure 3.21 — Critère de Von-Mises en contraintes sur les différents modèles patches.

En résolution séquentielle, ce calcul, de plus de 259 000 degrés de liberté, nécessite 1368,2 secondes. En résolution parallèle, si on répartit le problème sur sept domaines pour avoir une répartition un peu plus homogène sur les processeurs de calcul, le temps est de 614 secondes. Augmenter le nombre de sous-domaines n'a que peu d'intérêt étant donné que c'est le temps lié à l'intégration et à la factorisation du substrat qui est prédominant et restera identique quelque soit le nombre de sous-domaines de calcul. Le résolution du problème est plus rapide avec un solveur parallèle. Cette résolution itérative est réalisée en 40 itérations pour une convergence de  $10^{-8}$ , ce qui démontre le bon fonctionnement de l'opérateur de couplage énergétique avec un préconditionneur allégé.

## 3.5 Bilan

Dans ce chapitre, nous avons exposé les travaux menés pour appliquer une stratégie de résolution de type décomposition de domaine, dans le cadre d'une formulation Arlequin. L'écriture du problème d'interface dans un contexte Arlequin, ne nécessite que peu de modifications par rapport à la formulation issue des approches de décomposition de domaine sans recouvrement. Néanmoins, le développement d'un préconditionneur adapté a été nécessaire pour optimiser les performances du solveur itératif.

De la même façon que pour la résolution séquentielle, on constate que l'opérateur de couplage énergétique permet d'atteindre de bonnes solutions tout en égalant le nombre d'itérations obtenu avec un opérateur de couplage  $\mathcal{H}^1$ , avec une longueur caractéristique judicieusement choisie. Le complément de Schur possédant une structure dense, l'utilisation du préconditionneur optimal n'est pas opportune. Le préconditionneur allégé, issu des travaux de N. Elkhodja, requérant seulement la factorisation de l'opérateur de couplage énergétique, permet de grandement améliorer les performances de convergence. De plus, on constate que l'usage d'une fonction de pondération constante, sur une seule couche d'éléments de liaison, permet à la fois de préserver l'extensibilité de la méthode Arlequin et d'obtenir une solution de précision remarquable. Le développement de la méthode Arlequin aux résolutions parallèles itératives permet de simuler des modèles plus industriels. Ainsi, on démontre les possibilités de ces travaux sur le cas d'une représentation d'une aube complète comportant 31 perçages, dont la modélisation et la simulation, à l'aide d'outils classiques, s'avère encore extrêmement compliquée pour les bureaux d'études.



Ce dernier chapitre présente les possibilités d'utilisation de la méthode Arlequin pour faciliter la modélisation de phénomènes de ruines se produisant dans les structures composites stratifiés [23].

Plusieurs cas d'études sont présentés dans cette partie. Aux travers de quatre exemples, on étudie les capacités de la méthode Arlequin à simuler la dégradation de plis, la propagation de délaminage et l'aptitude à relier un modèle macroscopique homogénéisé avec un modèle d'échelle mésoscopique.

## 4.1 Introduction

La compréhension et la caractérisation des stratifiés sont un enjeu stratégique dans la conception aéronautique. En effet, de part les vastes possibilités d'assemblage des différents constituants, ces matériaux peuvent disposer, une fois les structures optimisées, de propriétés mécaniques supérieures à celles obtenues communément à l'aide de structures en matériaux conventionnels (acier, alliage d'aluminium, etc...), le tout pour une densité volumique plus faible. Cependant, contrairement aux matériaux métalliques, la modélisation de leur comportement à la rupture est plus complexe, ce qui suscite un manque de confiance auprès des industriels. L'endommagement, souvent dû à la présence d'effets de bords, est issu des conséquences de fabrication ou de dégradations en phase d'utilisation (impacts d'oiseaux, chocs de nacelles, etc.). Il nécessite encore d'importantes et coûteuses campagnes d'essais expérimentaux.

Comme introduit dans le premier chapitre, une structure stratifiée est réalisée par un empilement de plis unidirectionnels. Elle est définie sur trois niveaux d'échelles (cf section 1.1.2) : l'échelle de l'empilement, dite macroscopique, l'échelle du pli, dite mésoscopique et l'échelle des fibres, dite microscopique. Les phénomènes de rupture, qui influencent majoritairement la durée de vie des stratifiés tels que le délaminage ou les ruptures transverses, nécessitent un degré de modélisation au niveau du pli. Or, cette exigence d'échelle accroît de façon importante le coût de calcul et la durée des simulations. C'est dans ce contexte, de réduction des coûts et de facilité de mise en œuvre, que l'on utilise la méthode Arlequin. Les phénomènes de ruines des stratifiés apparaissant, généralement, dans des zones localisées, il n'est pas nécessaire d'avoir une représentation fine sur l'ensemble de la structure.

Nos travaux s'orientant vers une utilisation de type industrielle, les modèles et comportements employés dans ces simulations sont issus de travaux du département des matériaux composites de l'Onera (DMSC), dont la principale mission est de chercher à caractériser le comportement de structures destinées au secteur de la conception aéronautique. Afin de prouver l'intérêt de la méthode Arlequin, pour des problèmes de structures composites, on présente quatre cas de modélisations composites :

- le premier cas est une plaque stratifiée avec un perçage, soumise à un chargement de traction. Ce premier test est traité dans le cadre Arlequin en superposant à un modèle global stratifié, sans perçage, un modèle local stratifié, comportant le trou. En outre, pour ce cas, on commence par choisir des comportements élastiques pour examiner particulièrement les paramètres de la méthode en lien avec ses performances numériques.
- le deuxième cas est similaire au premier. La seule différence est que pour ce cas, le comportement du stratifié global est homogénéisé.
- dans le troisième cas, on s'intéresse à un problème de plaque possédant deux perçages, en intégrant un endommagement des plis (rupture de fibres et de la matrice) dans les patches Arlequin.
- dans le dernier cas, on simule un essai de propagation de délaminage par une modélisation utilisant des éléments de zones cohésives ; ces éléments étant intégrés dans un patch fin. Cette étude de propagation reproduit un essai expérimental, nommé DCB (**D**ouble-**C**antilever **B**eam).

L'ensemble de ces cas tests est effectué avec l'opérateur de couplage énergétique avec

blocage des modes rigides par couronne intérieure.

## 4.2 Plaque stratifiée percée

Cette première partie est consacrée à l'utilisation de la méthode Arlequin pour la modélisation d'une structure stratifiée. Pour expliquer la modélisation utilisée dans nos travaux, on choisit de reproduire le cas où la plaque est percée. La plaque considérée est constituée d'une superposition de plis possédant un comportement anisotrope. Suivant la séquence d'empilement, le comportement varie dans l'épaisseur du stratifié et change le comportement global de la structure. Dans ce cas, on propose d'utiliser la méthode Arlequin pour insérer dans un modèle global (grossier) de la plaque stratifiée, sans trou, un modèle raffiné local comprenant le perçage.

Avant d'expliquer les caractéristiques du couplage Arlequin, on détaille la modélisation employée pour représenter la structure stratifiée.

### 4.2.1 Modélisation d'une structure composite stratifiée.

Comme expliqué précédemment, la modélisation d'un stratifié peut se faire à trois échelles de représentation : l'échelle de l'empilement, l'échelle du pli et l'échelle des fibres/matrice. Dans nos travaux, nous souhaitons représenter la réponse globale de la structure ainsi que certains phénomènes de dégradation locale (délaminage, endommagement de pli).

Un premier choix de représentation, pour décrire les phénomènes critiques de ruine des structures stratifiées, est l'échelle du pli (cf figure 4.1(b)). Nous faisons le choix de représenter chaque pli par une couche d'éléments (cf figure 4.1(a)), constituant ainsi le modèle mésoscopique. Le pli étant défini à partir de la position  $z$  de la surface moyenne  $s$  et de son épaisseur  $e$ . Cette description ne nécessite pas de représenter les interactions fibres/matrice, ainsi chaque pli peut être décrit comme un matériau homogène possédant un comportement unidirectionnel. Le comportement phénoménologique du pli est obtenu à partir d'observations d'essais expérimentaux qui sont reliées de façon cohérente avec la théorie. Lors de la simulation, l'orientation des fibres pour chaque pli est prise en compte par une rotation du tenseur de rigidité.

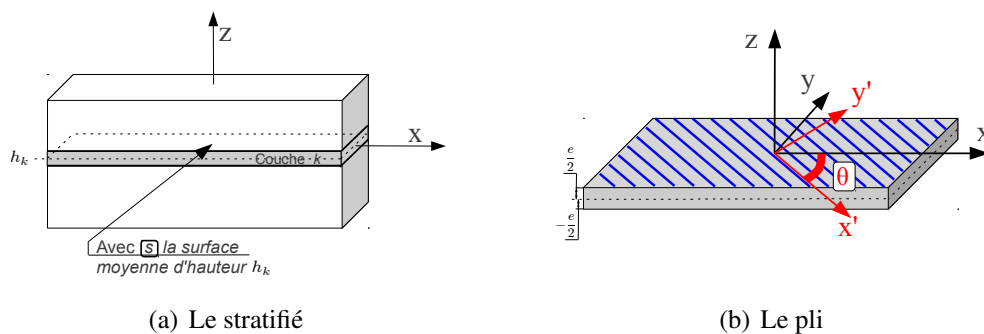


Figure 4.1 — Représentation de l'empilement stratifié.

### 4.2.2 Première modélisation Arlequin d'une plaque stratifiée percée.

Dans le cadre d'une modélisation avec l'approche Arlequin, on propose de lier un modèle global, représentant les plis avec une discrétisation longitudinale grossière, avec un modèle local qui possède une discrétisation longitudinale, de la surface moyenne  $s$ , plus raffinée, pour représenter plus fidèlement ce qui se déroule en bord d'une zone de concentration de contrainte. Pour cette première modélisation Arlequin, le substrat et le patch utilisent des maillages reproduisant la structure à l'échelle mésoscopique (cf figure 4.2).

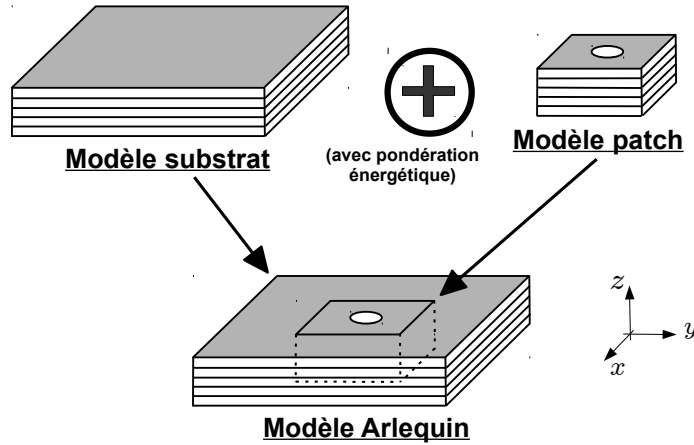


Figure 4.2 — Modélisation d'une plaque stratifiée percée par la méthode Arlequin.

On propose dans cette première modélisation de discrétiser transversalement les modèles substrat et patch de façon identique, dans l'épaisseur du matériau. La description transverse du modèle intermédiaire est identique à celles des deux modèles. Cependant, la particularité, relative aux structures composites, est que le comportement de chaque pli est anisotrope. L'opérateur de couplage énergétique étant similaire à un terme de raideur (cf 2.51), l'approche nous donne la possibilité de choisir le paramètre  $K_E$  pour s'approcher du comportement mésoscopique. L'opérateur de couplage est habituellement défini avec un paramètre qui reste constant,  $K_{cst}$  :

$$K_{cst} \int_s \sum_{i=1}^{n^p} \int_{-\frac{e_i}{2}}^{\frac{e_i}{2}} \varepsilon(\lambda) : [\varepsilon(u_i^G) - \varepsilon(u_i^L)] dz ds \quad (4.1)$$

Il peut aussi être défini avec les tenseurs de rigidité de chaque pli  $K_i$  comme paramètre. Ainsi, on a un opérateur de couplage qui intègre le comportement dans l'épaisseur :

$$\int_s \sum_{i=1}^{n^p} \int_{-\frac{e_i}{2}}^{\frac{e_i}{2}} \sigma_i(\lambda) : [\varepsilon(u_i^G) - \varepsilon(u_i^L)] dz ds \quad (4.2)$$

où  $z_0 < z_1 < \dots < z_i < \dots < z_{n^p}$ , avec  $z_0$  la coordonnée de la surface moyenne du premier pli et  $z_{n^p}$  la coordonnée de la surface moyenne du dernier pli.  $u_i^G$  représente le champ de déplacement du pli  $i$  issu du modèle global et  $u_i^L$  celui du modèle local. Le calcul



de cet opérateur est basé sur une intégration transverse par pli, avec  $e_i$  l'épaisseur du pli  $i$ , sur l'ensemble des  $n^p$  plis et une intégration longitudinale (dans le plan  $xy$ ), selon la surface moyenne  $s$  de la zone de collage. Observons que le paramètre de raideur, choisi équivalent au comportement isotrope, est remplacé, pli par pli, par un tenseur traduisant l'anisotropie du matériau.

### 4.2.3 Premiers tests numériques pour une plaque stratifiée percée

L'évaluation de la pertinence de la méthode Arlequin avec le couplage (4.2) est effectuée, ici, sur une plaque stratifiée possédant un perçage. Pour cette première simulation de structure composite, on réutilise le cas de la plaque percée, sollicitée par un chargement de traction dans le plan longitudinal. La surface moyenne de la plaque est carrée mesurant  $200mm$  de côté. Cette plaque est composée par un empilement de plis, chacun de  $0,250mm$  d'épaisseur. Cette plaque stratifiée comporte un perçage, passant par les centres des surfaces moyennes, de  $2mm$  de diamètre (cf figure 4.3). Le stratifié est sollicité en traction par l'intermédiaire de déplacements, égaux en module mais opposés en sens, imposés sur les faces de normales  $\vec{e}_2$  et  $-\vec{e}_2$ . Les autres faces du bord ou la frontière du perçage sont libres.

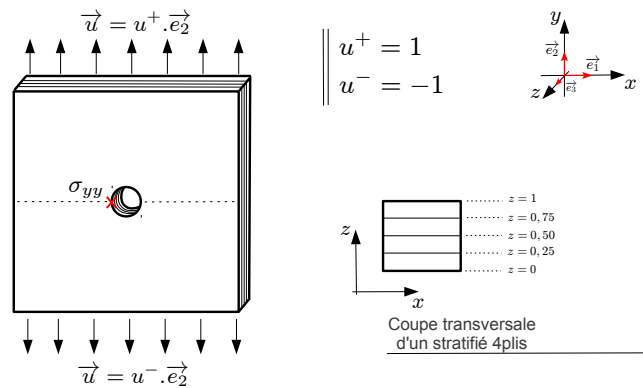


Figure 4.3 — Schéma de la simulation de la plaque stratifiée percée par la méthode Arlequin.

Pour la modélisation Arlequin, le modèle substrat représente la plaque sans perçage, modélisée à un niveau mésoscopique, pli par pli (cf figure 4.2). Le maillage de chaque pli est constitué de  $32 \times 32 = 1024$  éléments briques dans la surface moyenne de chaque pli, avec un seul élément dans l'épaisseur. Le perçage est représenté sur un modèle patch carré de  $40mm$  de côté, discrétisé pour chaque pli par un seul élément dans l'épaisseur et par 63 éléments triangulaires dans la surface moyenne. Ce maillage est raffiné en bord de perçage. La représentation du stratifié est donc conforme dans l'épaisseur entre les deux maillages (cf figures 4.4). De façon identique aux cas des chapitres précédents, la zone de couplage est composée d'éléments briques qui sont dupliqués pour constituer la zone de collage du maillage intermédiaire. La partie libre du maillage intermédiaire est composée de 10 éléments tétraèdres, indépendamment du nombre de plis composant le stratifié. L'ensemble de ces maillages utilisent des éléments linéaires tridimensionnels.

Pour les modèles substrat et patch, on adopte les hypothèses de petites perturbations et on suppose que le matériau pour chaque pli est élastique homogène et anisotrope. Le matériau

considéré, pour chaque pli, est du T300 / 914 dont les caractéristiques sont données dans la table (4.5).

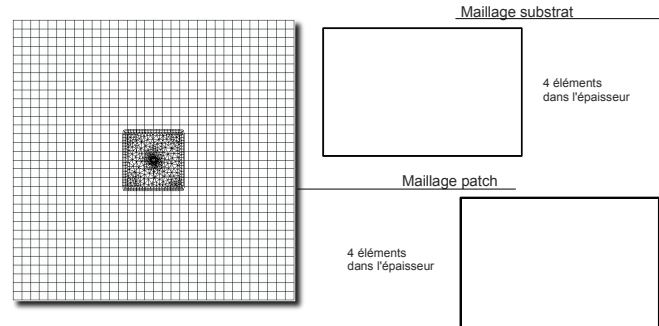


Figure 4.4 — Maillages du modèle substrat et du modèle patch pour un stratifié à 4 plis.

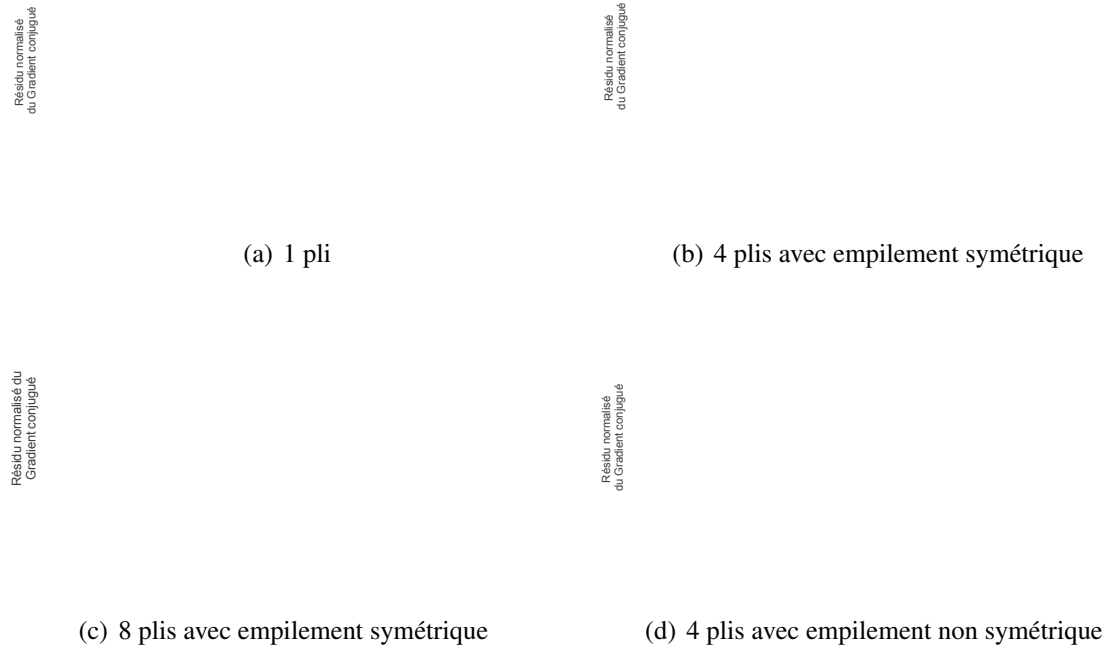
Autour de ce problème, on teste premièrement, pour différentes séquences d'empilement, l'impact du paramètre de raideur de couplage sur le nombre d'itérations d'une résolution parallèle. Dans un second temps, on compare différents champs de contraintes en bord de perçage pour une modélisation Arlequin par rapport à un cas monomodele de référence. Cette modélisation de référence représente chaque pli par 2196 éléments prismes avec un unique élément pour discrétiser l'épaisseur d'un pli. Ainsi, le maillage de référence, pour cet empilement de quatre plis, contient 8784 éléments. Notons que ce maillage possède une discrétisation identique au modèle patch dans la zone d'intérêt pour une comparaison à représentation égale.

Examinons l'influence du paramètre de rigidité de l'opérateur de couplage qui relie les deux modèles. Dans le système complet, le terme de couplage modifie le conditionnement de la matrice complète (cf système 2.21). Afin d'évaluer l'impact d'une telle modification, on effectue quatre calculs de structures stratifiées à plis anisotropes. Pour chaque cas, on teste des raideurs de couplage constante (dénotee  $K_{cst}$ ) et intégratrice d'anisotropie (notée  $K_{aniso}$ ) et ce avec et sans préconditionneur. Les résultats sont donnés sur les figures (4.6).

Pour l'ensemble des simulations (cf figures 4.6), on constate que le système avec un opérateur de couplage, intégrant l'anisotropie, nécessite moins d'itérations pour converger. Ce type de comportement est aussi observé lors de l'application d'un préconditionneur, bien que les différences soient moins significatives. Lorsque l'on utilise un préconditionneur, on remarque que les simulations convergent avec un nombre plus faible d'itérations ; ce qui confirme l'intérêt du préconditionneur, observé dans le chapitre précédent. Le fait nouveau,

Matériau : T300 / 914		
$E_l$	140GPa	Module longitudinal
$E_t$	10GPa	Module transverse
$\nu_{lt}$	0,31	Coefficient de Poisson longitudinal
$\nu_{tt}$	0,48	Coefficient de Poisson transverse
$G_{lt}$	8,8GPa	Module cisaillement

Figure 4.5 — Tableau des propriétés du T300 / 914.

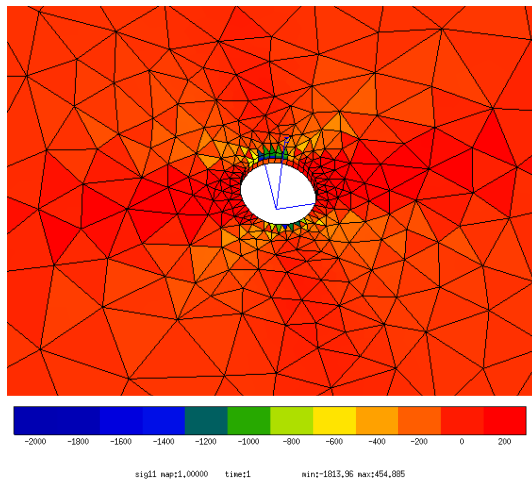
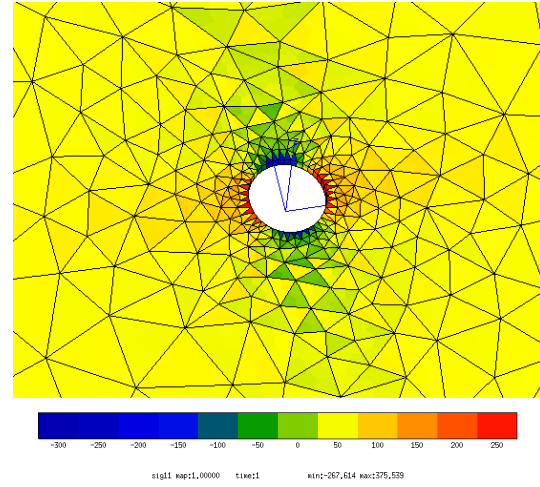
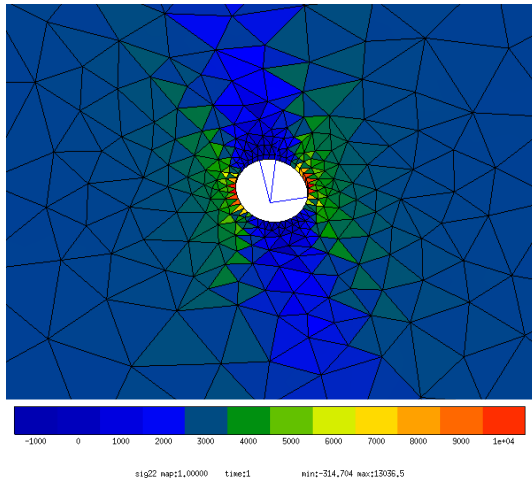
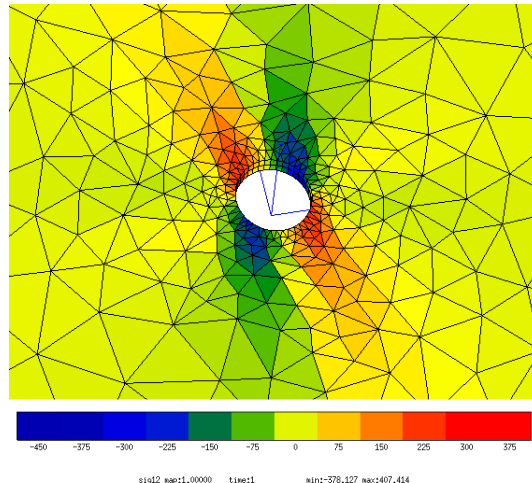


**Figure 4.6** — Courbes de convergence de résolutions itératives pour 4 types d’empilements.

ici, est que l’on constate que le système, utilisant un couplage intégrateur d’anisotropie, semble offrir un système mieux conditionné que le système utilisant un coefficient constant  $K_{cst}$ .

On évalue à présent, plus en détail, la précision des résultats obtenus par la méthode Arlequin sur le cas d’une structure stratifiée symétrique à quatre plis dont l’empilement est  $(0^\circ, 90^\circ)^{sym}$ . L’empilement du stratifié étant symétrique, on focalise nos observations sur les deux plis supérieurs. Notons  $l_1$ , le pli orienté à  $90^\circ$ , situé au dessus du plan médian ( $0.5 \leq z \leq 0.75$ , cf figure en bas à droite 4.3), et  $l_2$ , celui orienté à  $0^\circ$ , situé au dessus de  $l_1$  ( $0.75 \leq z \leq 1.$ , cf figure en bas à droite 4.3). Afin de vérifier les valeurs obtenues avec la méthode Arlequin, on privilégie quatre reproductions de champs de contraintes, observées aux points de Gauss, au centre de la zone d’intérêt. La première figure (4.7(a)) détaille le champ de contrainte  $\sigma_{xx}$  pour les deux plis  $l_1$  et  $l_2$ . Les valeurs du champ  $\sigma_{xx}$  sont bornées par une valeur maximale à 454,885MPa et une valeur minimale de  $-1813,96$ MPa. Sur la deuxième figure (4.7(b)), on représente ce champ uniquement sur le pli  $l_1$ . Les valeurs du champ de contraintes  $\sigma_{xx}$  sont bornées par la valeur maximale 375,539MPa et par  $-267,414$ MPa comme valeur minimale. Dans la troisième figure (4.7(c)), on montre le champ de contraintes  $\sigma_{yy}$  sur le pli  $l_1$ . La plaque trouée étant sollicitée en traction selon la direction  $y$ , les valeurs de ce champ sont les plus importantes. Ce champ a pour valeur maximale 13 036,5MPa et pour valeur minimale  $-314,704$ MPa. Sur la dernière figure (4.7(d)), on représente le champ de contraintes de cisaillement  $\sigma_{xy}$ . Sur cette représentation, les valeurs du champ sont bornées par 404,414MPa au maximum et par  $-378,127$ MPa en valeur minimale.

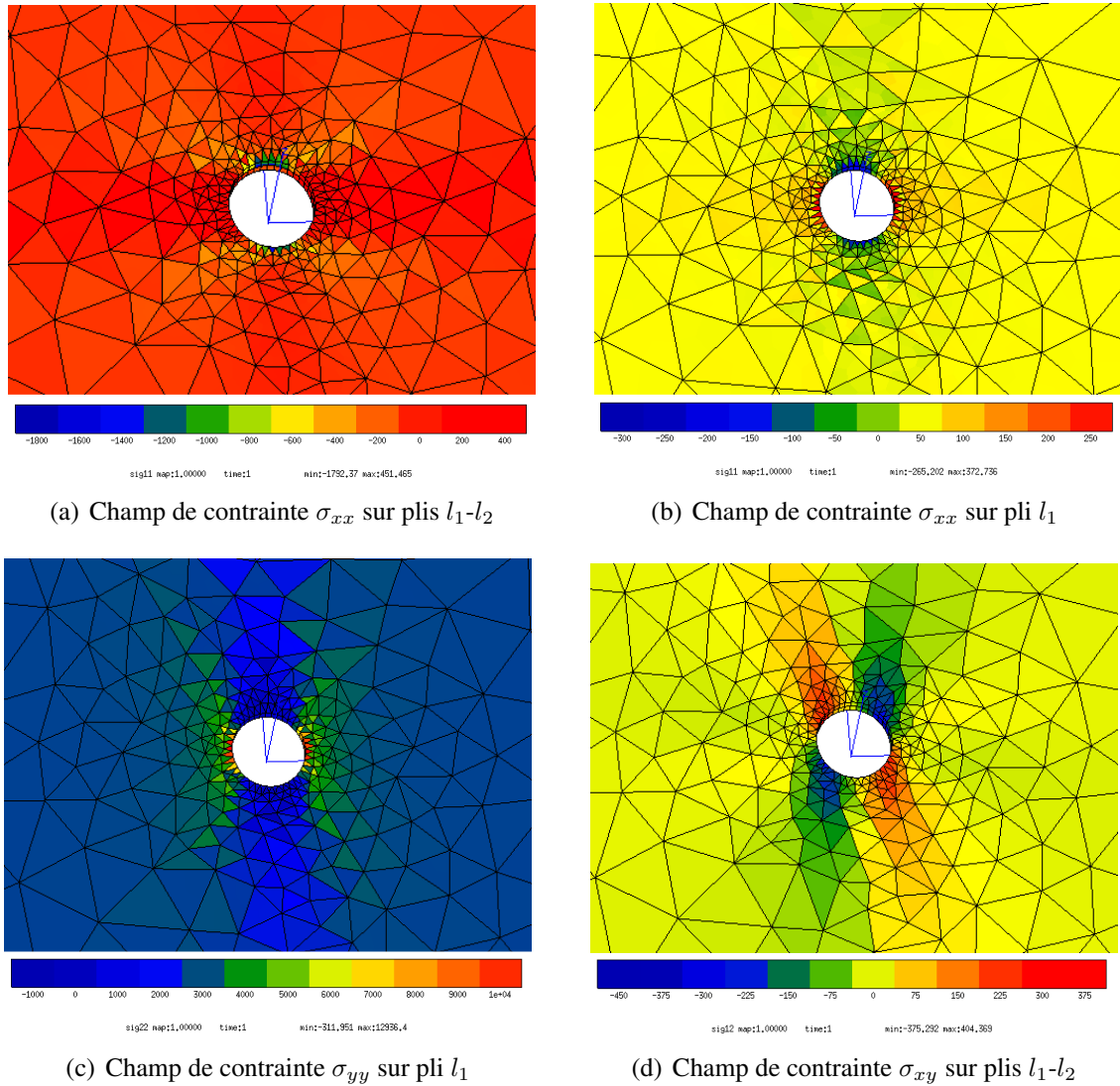
Pour le même cas, on représente sur les figures (4.8), les mêmes champs, obtenus dans le

(a) Champ de contrainte  $\sigma_{xx}$  sur plis  $l_1$ - $l_2$ (b) Champ de contrainte  $\sigma_{xx}$  sur pli  $l_1$ (c) Champ de contrainte  $\sigma_{yy}$  sur pli  $l_1$ (d) Champ de contrainte  $\sigma_{xy}$  sur plis  $l_1$ - $l_2$ **Figure 4.7** — Figures de champs de contraintes autour du perçage pour la modélisation monomodèle.

cadre de la modélisation Arlequin, avec un opérateur de couplage, tenant compte de l'anisotropie du matériau. Mais, nous observons que ces résultats ne changent pas en utilisant une raideur de couplage constante. Seul le nombre d'itérations change.

En bilan, on constate que, pour tous les champs représentés, la méthode Arlequin permet de simuler correctement ce type de structures puisque les figures sont quasiment identiques. De plus, lorsque l'on compare les valeurs maximales et minimales de ces champs, les erreurs relatives calculées sont inférieures à 0,8%. Cela démontre les capacités de la méthode Arlequin à reproduire, dans le cas d'un chargement en traction, le comportement d'un stratifié composite possédant une faiblesse structurelle et ce, à coûts moindres.

Le test, que nous venons de traiter et commenter, utilise le cadre Arlequin pour les plaques stratifiées en se contentant de l'intégration d'une altération géométrique locale (un perçage) et en ne raffinant que le modèle patch. Ce premier calcul étant déjà valorisant pour la méthode Arlequin, nous cherchons à explorer davantage les potentialités de la méthode



**Figure 4.8** — Figures de champs de contraintes autour du perçage pour la modélisation Arlequin.

dans des modélisations encore plus intéressantes en pratique.

### 4.3 Deuxième modélisation Arlequin d'une plaque stratifiée percée (modèle substrat homogénéisé).

Dans cette seconde modélisation Arlequin du problème considéré dans la section précédente, on transforme le comportement du modèle grossier du stratifié en un comportement macroscopique homogénéisé dans l'épaisseur. Ce modèle est une approximation du modèle grossier précédent où chaque pli était représenté avec son propre comportement. Le comportement macroscopique homogénéisé est calculé à partir des comportements, orientations et épaisseurs des plis constituant le stratifié. Ce modèle, au coût réduit, est cependant limité

puisque'il n'est pas capable de représenter les effets de bords, les interactions entre plis et ne peut être sollicité en flexion (il est limité aux chargements de membranes).

Dans cette partie, on étudie le couplage de ce modèle grossier avec un modèle fin qui comporte le perçage et prend en compte le comportement de chaque pli (cf figure 4.9). Dans la suite, après avoir brièvement introduit le principe de l'homogénéisation employée, on évalue les performances d'un collage, dans le cadre Arlequin, entre le modèle global macroscopiquement homogénéisé et le modèle local qui empile des modèles mésoscopiques homogénéisés.

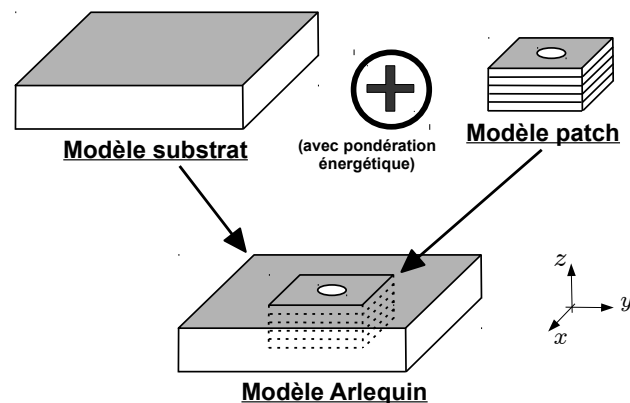


Figure 4.9 — Modélisations des deux modèles de la plaque stratifiée percée avec homogénéisation par la méthode Arlequin

### 4.3.1 Homogénéisation macroscopique

La représentation, à l'échelle macroscopique, permet de décrire correctement le comportement global de déformation que subit la structure dans certains types de chargements. Afin de minimiser les variables intervenant dans ce modèle, le stratifié est représenté, dans l'épaisseur, par un unique élément avec un comportement homogénéisé. Bien que cette description ne permette pas de prendre en compte des phénomènes liés à chaque pli, elle est souvent suffisante pour représenter le comportement global moyen de la structure complète hors des zones critiques. Dans notre cas, nous choisissons d'utiliser des éléments volumiques standards, parce que nous ne disposons pas de modèles de coques performants actuellement. Observons qu'il est possible de coupler des formulations coques avec des formulations volumiques par la méthode Arlequin [101, 59]. Donc, nos développements peuvent être adaptés pour de tels couplages.

Le comportement utilisé, pour décrire l'allure du stratifié, est calculé à partir d'une homogénéisation de l'empilement des plis. Cette homogénéisation utilise la théorie classique des stratifiés, fondée sur un schéma standard de déformation du premier ordre de plaque, se limitant aux chargements en membrane [68, 106, 107, 102]. Le cadre mathématique de cette homogénéisation est issu des méthodes de changements d'échelles reprenant le cadre TFA (Transformation field analysis [108]).

Dans le domaine des stratifiés, le changement d'échelle s'effectue entre les champs macroscopiques de contrainte et de déformation ( $\Sigma$ ,  $E$ ) et les champs mésoscopiques relatifs à chaque pli ( $\sigma_i$ ,  $\varepsilon_i$ ). À l'aide de relations de changement d'échelles, il est possible de déduire la loi de comportement macroscopique du stratifié. Ce calcul s'effectue à partir des propriétés du pli, établies par le tenseur de rigidité  $C_i$  tel que :

$$\sigma_i = C_i : \varepsilon_i \quad (4.3)$$

Le passage entre les champs macroscopiques et les champs microscopiques est accompli par l'intermédiaire d'opérateurs de localisation et de prolongation. Ces opérateurs sont calculés avec deux hypothèses. La première est que les déformations planes restent constantes dans l'épaisseur et égales aux déformations planes du stratifié. La deuxième est que les contraintes hors-plan restent constantes dans l'épaisseur et égales aux contraintes hors-plan macroscopiques. Cependant, l'utilisation d'une loi de comportement homogénéisée, avec ce formalisme, n'est rendu possible que dans le cas de chargements homogènes sur l'ensemble de la structure. Ce comportement ne peut donc pas être appliqué pour des sollicitations en flexion, pour lesquelles la déformation ne reste pas constante dans l'épaisseur. Les deux hypothèses s'écrivent :

$$\forall i, \quad \varepsilon_i^p = E^p \quad (4.4)$$

$$\sigma_i^t = \Sigma^t \quad (4.5)$$

avec le terme  $E^p$  qui représente les déformations planes macroscopiques et le terme  $\Sigma^t$  les contraintes transverses macroscopiques. Pour chaque pli  $i$ , le terme  $\varepsilon_i^p$  représentent les déformations planes mésoscopiques et  $\sigma_i^t$  les contraintes transverses mésoscopiques. Le comportement élastique macroscopique du stratifié peut s'écrire en fonction des propriétés de chaque pli et de tenseurs de localisation relatifs :

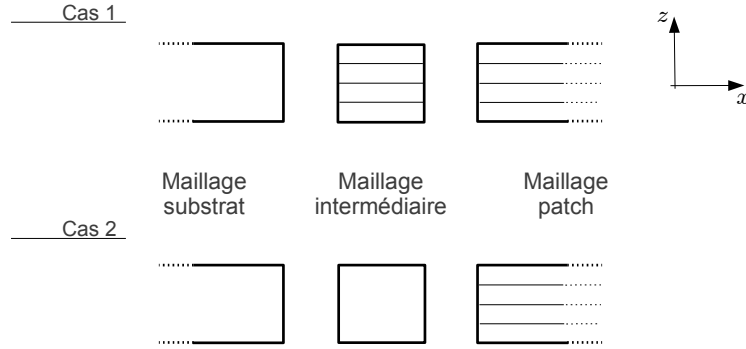
$$\Sigma = C_H : E \quad (4.6)$$

$$C_H = \sum_i c_i C_i : A_i \quad (4.7)$$

avec  $c_i$  la fraction volumique du pli  $i$ ,  $C_i$  l'opérateur de rigidité de chaque pli et  $A_i$  le tenseur de localisation tel que  $\varepsilon_i = A_i : E$ . Suite à une série d'essais virtuels, selon les directions principales, on identifie les six composantes qui constituent le tenseur de rigidité homogénéisé  $C_H$  qui représente le comportement global du stratifié.

Dans ce cadre d'utilisation de la méthode Arlequin, où le comportement du substrat dans l'épaisseur est différent de celui du modèle patch, le maillage intermédiaire peut avoir différentes discrétisations. En effet, le maillage intermédiaire peut être similaire au maillage du modèle patch, avec quatre éléments dans l'épaisseur (cf cas 1 sur la figure 4.10), comme dans le premier cas de modélisation expliqué dans la section précédente, où celui-ci peut décrire l'épaisseur du stratifié de la même manière que le modèle substrat, avec un seul élément (cf cas 2 sur la figure 4.10).





**Figure 4.10** — Maillages intermédiaires pour une modélisation Arlequin avec modèle substrat possédant un comportement homogénéisé.

Un dernier point d'explication, concernant la modélisation Arlequin pour ce type de représentation, implique l'opérateur de couplage lorsqu'il utilise le comportement anisotrope. Les comportements étant différents, il est nécessaire de choisir celui utilisé dans l'opérateur de couplage avec les deux modèles. Afin de coupler avec le modèle le moins contraignant, on choisit d'utiliser le tenseur de rigidité du modèle homogénéisé pour l'opérateur de couplage.

$$\int_s \sum_{i=1}^{n^p} \int_{z_{i-1}}^{z_i} \sigma_{homogeneise}(\lambda) : [\varepsilon(u^G) - \varepsilon(u_i^L)] dz ds \quad (4.8)$$

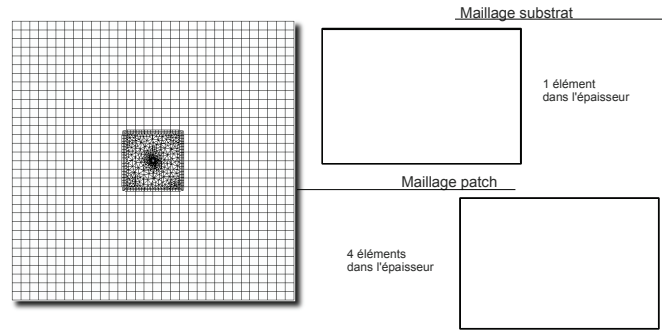
où  $\sigma_{homogeneise}(\lambda) = C_{homogeneise} \varepsilon(\lambda)$  avec le terme  $C_{homogeneise}$  qui représente le tenseur de rigidité du comportement macroscopique homogénéisé.

### 4.3.2 Test de la deuxième modélisation.

On teste l'emploi d'un modèle de comportement homogénéisé, pour le substrat, sur le cas de la plaque stratifiée soumise à une traction, comportant un perçage en son centre. Dans ce cas test, les conditions limites ainsi que le modèle patch sont identiques à ceux utilisés dans la simulation précédente. Mais, on modifie le maillage du modèle substrat. Le comportement étant homogénéisé dans le substrat, un unique élément dans l'épaisseur est suffisant pour le représenter. Ainsi le maillage du substrat est constitué de 1024 éléments briques tri-linéaires d'épaisseur égale à la somme des épaisseurs des plis (pour un stratifié à quatre plis, l'épaisseur est de  $1mm$ , (cf figure 4.9)). On se place selon les hypothèses de petites perturbations avec un matériau élastique homogène. Identiquement au cas précédent, le matériau utilisé pour caractériser le comportement du pli est toujours le T300 / 914 (cf tableau 4.5), qui est élastique homogène, anisotrope.

Le comportement macroscopiquement homogénéisé est calculé à partir du comportement des plis ainsi que de la séquence d'empilement (épaisseur de pli, orientation des fibres, ordre d'empilement). Pour cette simulation, l'homogénéisation est obtenue par l'intermédiaire d'un calcul annexe. Le tenseur de rigidité homogénéisé du modèle substrat est présenté





**Figure 4.11** — Maillages du modèle substrat et du patch pour un stratifié à 4 plis avec un comportement homogénéisé pour le substrat.

par la matrice suivante (exprimé en MPa) :

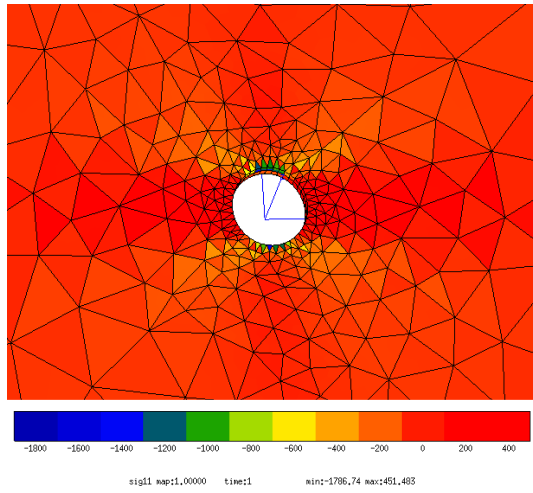
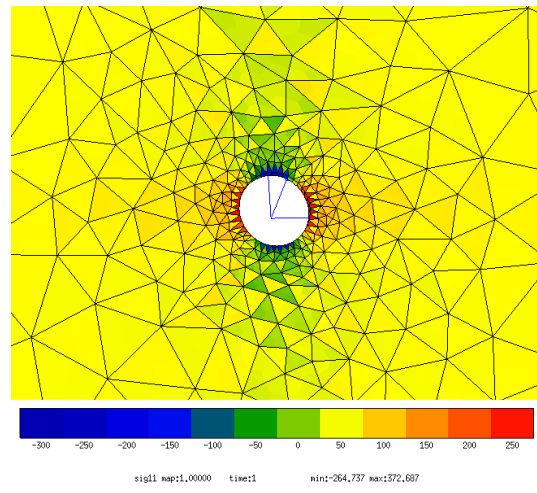
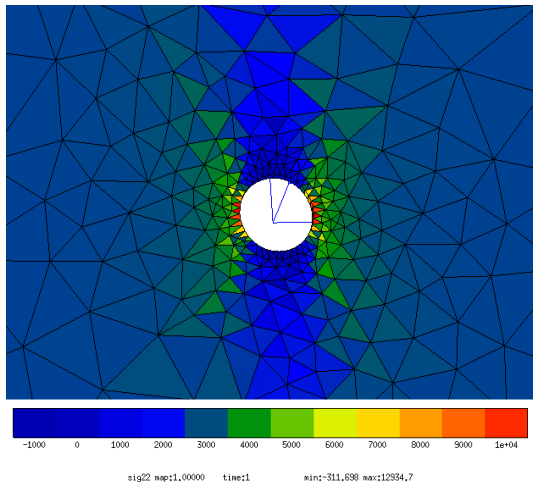
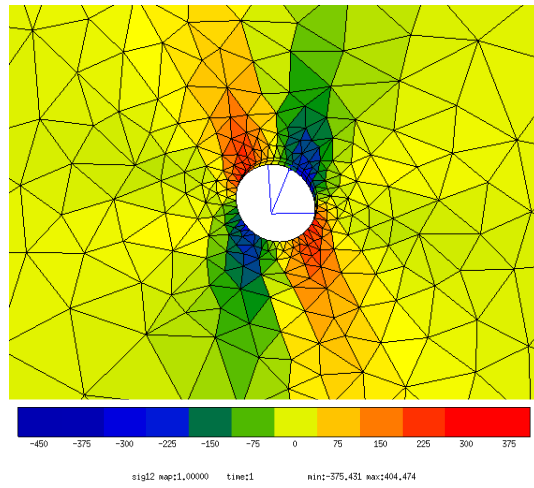
$$C_{homogeneise} = \begin{pmatrix} 78522,8 & 6125,84 & 6310,47 & 0 & 0 & 0 \\ 6,12584 & 78,5228 & 6310,47 & 0 & 0 & 0 \\ 6310,47 & 6310,47 & 13254,5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 7644,2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 7644,2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 8800 \end{pmatrix} \quad (4.9)$$

L'évaluation des performances, pour l'utilisation d'un modèle de comportement homogénéisé pour le substrat, est réalisée sur les mêmes champs de contraintes que ceux montrés dans le test précédent. Ainsi, les valeurs trouvées peuvent être comparées au cas de référence monomodèle. On commence par observer ces champs de contraintes dans le cas où le maillage intermédiaire possède une discrétisation, dans l'épaisseur, identique au modèle patch.

On constate, tout d'abord, que les résultats sont encore identiques, quelque soit le type d'opérateur de couplage utilisé. Notons alors que les champs représentés sont obtenus avec un opérateur de couplage utilisant le tenseur des rigidités anisotropes des plis. Pour ces quatre figures (4.12(a), 4.12(b), 4.12(c) et 4.12(d)), on montre que les champs obtenus sont quasi-identiques à ceux de référence. De plus, les erreurs relatives entre les valeurs maximales et minimales avec les deux types de modélisation sont inférieures à 0,8%. Cela indique la pertinence du calcul effectué avec une modélisation Arlequin, sachant que le modèle homogénéisé du substrat n'est pas aussi précis qu'un modèle substrat stratifié.

Dans une deuxième modélisation, le maillage intermédiaire est modifié de façon à ne comporter qu'un unique élément dans l'épaisseur. Cette description est à rapprocher de celle du substrat. Ainsi, dans cette situation, l'opérateur de couplage, tenant compte de l'anisotropie, doit être basé sur le tenseur de rigidité du modèle substrat homogénéisé.

Dans ce cadre de modélisation, le nombre de variables, assurant le couplage, est moindre, donnant une plus grande souplesse au collage. En étudiant les champs de contraintes autour du perçage (cf figures 4.13(a), 4.13(b), 4.13(c) et 4.13(d)), on confirme les performances de l'utilisation de la méthode Arlequin. Lorsque l'on observe les erreurs relatives pour les valeurs extrêmes, elles sont inférieures à 1,2%. Ces erreurs sont un peu plus importantes que

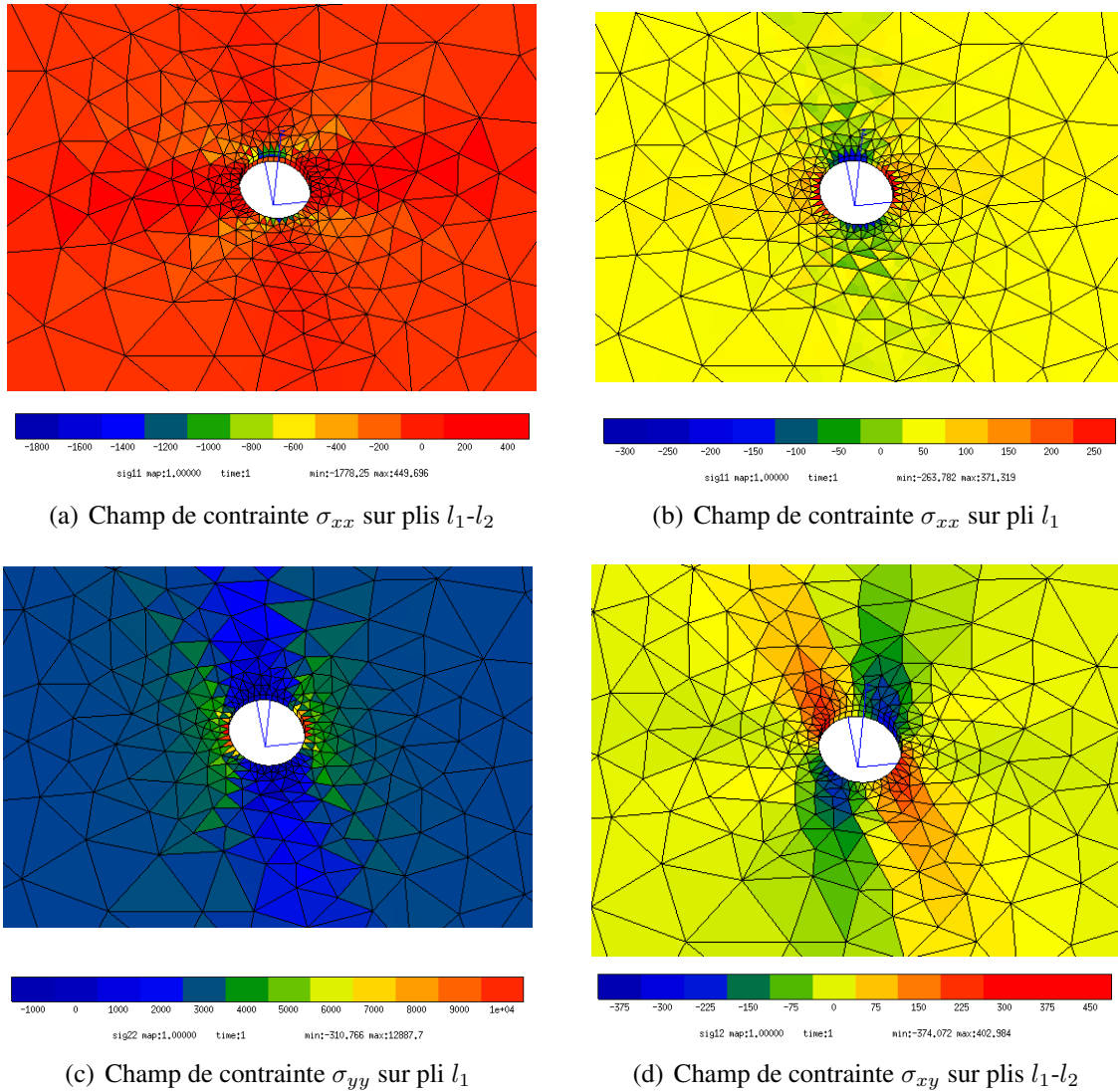
(a) Champ de contrainte  $\sigma_{xx}$  sur plis 11-12(b) Champ de contrainte  $\sigma_{xx}$  sur pli 11(c) Champ de contrainte  $\sigma_{yy}$  sur pli 11(d) Champ de contrainte  $\sigma_{xy}$  sur plis 11-12

**Figure 4.12** — Figures de champs de contraintes autour du perçage pour la modélisation Arlequin avec le modèle substrat possédant un comportement homogénéisé dans l'épaisseur.

pour les modélisations précédentes ; mais elles restent faibles.

En résumé, on remarque que l'utilisation d'une loi de comportement macroscopiquement homogénéisée, pour le substrat, donne de bonnes représentations pour les champs de contraintes tout en réduisant les coûts. Ce procédé peut donc être employé pour fortement diminuer les coûts dans les zones non critiques avec un modèle substrat suffisant pour reproduire l'allure du stratifié dans son ensemble. Cependant, l'homogénéisation est limitée à certains types de chargement (ainsi lorsque la structure est sollicitée en flexion, il n'est pas possible d'utiliser ce type d'approximation de comportement). L'homogénéisation n'est pas acceptable, non plus, aux bords des structures stratifiées.

Maintenant que l'on a évalué l'utilisation de la méthode Arlequin pour coupler des structures stratifiées, on poursuit notre étude en introduisant différents modèles d'affaiblissement (endommagement et rupture).



**Figure 4.13** — Figures de champs de contraintes autour du perçage pour la modélisation Arlequin avec le modèle substrat possédant un comportement homogénéisé dans l'épaisseur et un modèle intermédiaire n'ayant qu'un seul élément dans l'épaisseur.

## 4.4 Plaque stratifiée avec endommagement.

Dans cette section, nous proposons une modélisation Arlequin pour le problème de l'endommagement mésoscopique (i.e. à l'échelle du pli) d'une plaque composite stratifiée. Ce problème occupe une place très importante au sein du département des matériaux composites de l'Onera (DMSC). Il a fait l'objet de nombreuses études [78, 80, 79].

Dans un premier temps, nous commençons par rappeler la loi d'endommagement que nous utilisons dans nos tests. Dans un second temps, nous détaillons notre mise en place de la méthode Arlequin pour le calcul d'une plaque stratifiée, ayant deux perçages, en tenant compte de l'endommagement de cette plaque dans les zones, au voisinage des deux perçages.

#### 4.4.1 Loi d'endommagement

Dans le domaine des matériaux composites, de nombreux travaux ont été menés sur les critères de rupture des structures stratifiées ([58] en tant que bonne synthèse). Parmi les critères existants, les critères macroscopiques ainsi que les critères multiéchelles, liés aux propriétés microscopiques, ont tendance à surestimer les valeurs des efforts par rapport aux expériences. Dans les critères utilisés, ceux attachés aux propriétés mésoscopiques s'avèrent souvent plus performants [78] en terme de rapport ( finesse d'étude/coûts de calcul).

Pour nos simulations, nous choisissons d'employer une loi de comportement qui lie la dégradation des propriétés du pli en fonction de variables d'endommagement et de critères multiéchelles mésoscopiques de type phénoménologique [83, 78, 80]. Dans cette section, cette loi est simplifiée à une écriture élastique endommageable. Sans aucune détérioration, la relation élastique initiale s'écrit :

$$\sigma = C^0 \varepsilon \quad (4.10)$$

Avec  $\varepsilon$  et  $\sigma$ , les termes qui représentent les déformations et contraintes totales reliées par le terme  $C^0$  qui incarne la rigidité élastique initiale du pli. La loi endommageable utilise un terme de rigidité  $\tilde{C}$ , dégradation de la rigidité initiale  $C^0$ , qui prend en compte les effets de rupture de fibre et de ruptures interfibres. Elle s'écrit :

$$\sigma = \tilde{C}(C^0, d_1, d_2) \varepsilon \quad (4.11)$$

La diminution de la rigidité  $C^0$  est équivalente à une augmentation de la souplesse initiale  $S^0$ . La souplesse tenant compte de l'endommagement peut s'écrire [78] :

$$\tilde{S} = S^0 + \Delta S = S^0 + d_1 H_1 + d_2 H_2 \quad (4.12)$$

Dans ce cadre d'écriture, deux phénomènes de ruine sont pris en compte : la rupture de fibre et la rupture interfibres. Le terme  $d_1$  tient compte de la cinétique du premier mode d'endommagement, dirigée par un tenseur d'effets  $H_1$ . Les termes  $d_2$  et  $H_2$  sont liés au second type d'endommagement. Les cinétiques de dégradation dépendent de l'historique de dépassement des valeurs des critères de rupture multiéchelle, s'appliquant à chaque pli :

$$d_1 = \alpha \text{Sup}_t (\langle \sqrt{f_1} - 1 \rangle^+) \quad : \text{Rupture de fibre} \quad (4.13)$$

$$d_2 = \beta \text{Sup}_t (\langle \sqrt{f_2} - 1 \rangle^+) \quad : \text{Rupture de interfibres} \quad (4.14)$$

où  $\alpha, \beta$  sont des coefficients de réglage qui définissent la rupture du pli, dès que la première fibre est cassée, tout en laissant l'endommagement croître sous l'effet des fissures de la matrice.  $\text{Sup}_t$  est une fonction qui prend en compte l'histoire du chargement et rend l'endommagement irréversible. Les cinétiques de déformations sont fonctions des critères de rupture  $f_1$  et  $f_2$ . Ces critères sont initialement basés sur ceux de Hashin [55, 54] et distinguent les chargements en traction de ceux en compression. Il y a quatre types de critères qui ont été adaptés pour être plus déterministes.

- pour la rupture de fibre, dans le cas de la traction, le critère est modifié pour tenir compte de l'influence de la dégradation de la matrice.

$$f_1^+(\sigma_{11}, d_2) = \left( \frac{\sigma_{11}}{\tilde{X}_t(d_2)} \right)^2 \quad \text{si } \sigma_{11} \geq 0 \quad (4.15)$$

avec  $\tilde{X}_t$  la résistance efficace du pli en traction longitudinale qui considère la perte des propriétés, due à la décohésion, de l'ensemble matrice/fibres car la résistance d'une fibre décorrélée (i.e. séparée) de la matrice peut être 50% inférieure [78] à une fibre reliée à la matrice.

- pour la rupture de fibre, dans le cas de la compression, le critère est modifié pour tenir compte de l'influence du cisaillement.

$$f_1^-(\sigma_{11}, \sigma_{22}, \tau_{12}) = \left( \frac{\sigma_{11}}{X_c} \right)^2 + \left( \frac{\tau_{12}}{S_c^f(1 - p\sigma_{22})} \right)^2 \quad \text{si } \sigma_{11} < 0 \quad (4.16)$$

avec  $X_c$  le terme qui représente la résistance en compression longitudinale selon le chargement  $\sigma_{11}$ ,  $S_c^f$  le terme qui représente la résistance en cisaillement pour un mode fibre, sachant que  $S_c^f > S_c$  (résistance en cisaillement de l'ensemble), et le coefficient  $p$  qui décrit le renforcement du matériau en compression transverse.

- pour la rupture interfibres, dans le cas de la traction, le critère est modifié afin de prendre en compte l'affaiblissement de la résistance due aux contraintes de cisaillement.

$$f_2^+(\sigma_{22}, \tau_{12}) = \left( \frac{\sigma_{22}}{Y_t} \right)^2 + \left( \frac{\tau_{12}}{S_c(1 - p\sigma_{22})} \right)^2 = (1 - d_f)^2 \quad \text{si } \sigma_{22} \geq 0 \quad (4.17)$$

avec  $Y_t$  le terme qui représente la résistance en traction longitudinale selon le chargement  $\sigma_{22}$ .

- pour la rupture interfibres, dans le cas de la compression transverse, le critère prend en compte le renforcement.

$$f_2^-(\sigma_{22}, \tau_{12}) = \left( \frac{\sigma_{22}}{Y_c} \right)^2 + \left( \frac{\tau_{12}}{S_c(1 - p\sigma_{22})} \right)^2 = (1 - d_f)^2 \quad \text{si } \sigma_{22} < 0 \quad (4.18)$$

avec la variable de dégradation  $d_f$  qui est totalement définie par la connaissance du seuil de dégradation et d'un coefficient cinétique. Cette variable de dégradation dépend de l'historique du chargement et du caractère irréversible de la dégradation.

Remarque :

On peut noter que cette loi de comportement mésoscopique peut être complétée afin de tenir compte de certains effets micromécaniques [63] et notamment des effets de dégradation hors-plan à l'aide d'une grandeur  $d_z$ . Un tenseur de variation de souplesse supplémentaire a été rajouté, représentant la déformation d'endommagement induite par les fissures transverses qui traduit les conséquences du délaminage local liée à la densité de ces fissures (représentation des défauts apparaissant sur un pli à 90° entouré de 2 plis à 0°, cf figure 4.14).

Notons que, suite à une campagne d'essais virtuels, il est possible de déterminer l'impact du taux de délaminage  $\bar{\mu}$  et de la densité de fissures transverses  $\bar{\rho}$  sur la résistance du pli. Ainsi, un tenseur de souplesse efficace  $\Delta S^*(S^0, \bar{\rho}, \bar{\mu})$  permet de réduire, encore, la rigidité en ajoutant les effets des délaminages locaux produits par les fissures transverses.

$$\tilde{S}^*(S^0, d_1, d_2, \bar{\mu}, \bar{\rho}) = S^0 + \Delta S + \Delta S^* \quad (4.19)$$

**Figure 4.14** — Définitions des paramètres d'endommagement du pli ( $\rho, \mu$ ) et de l'épaisseur  $h$  pour déterminer le tenseur de rigidité équivalente  $C$  du pli.

#### 4.4.2 Simulation d'un couplage avec une loi endommageable

L'évaluation de l'utilisation de la méthode Arlequin dans le couplage entre un modèle de comportement élastique et un modèle de comportement endommageable est effectuée sur une plaque stratifiée possédant deux perçages. Pour cette première modélisation de l'endommagement avec la méthode Arlequin, on utilise un modèle de comportement endommageable pour représenter la propagation des ruptures dans les plis, uniquement sur le patch qui contient les zones critiques. Le substrat emploie un modèle de comportement élastique non endommageable pour diminuer les coût de calcul dans les zones sans endommagement.

Pour cela, on considère une plaque rectangulaire stratifiée, de surface moyenne mesurant  $120mm \times 38mm$ , constituée d'un empilement de cinq plis de  $0,262mm$  d'épaisseur, dont les orientations sont  $(0^\circ, 0^\circ, 90^\circ, 0^\circ, 0^\circ)$ . Cette plaque comporte deux perçages de  $7,8mm$  de diamètre, centrés aux points de coordonnées  $(0, 6, 0)$  et  $(0, -6, 0)$  (cf figure 4.15). La plaque stratifiée est sollicitée en traction par l'intermédiaire de déplacements normaux appliqués sur les deux faces de normales  $-\vec{e}_1$  et  $\vec{e}_1$ . Afin de bloquer les modes rigides de la plaque, deux conditions limites sont ajoutées sur deux ensembles de nœuds du maillage. Ainsi, les nœuds du centre de la plaque (de coordonnées  $(0, 0, z)$ ) sont bloqués selon la direction  $x, y$  dans toute l'épaisseur, avec un déplacement écrit  $\vec{u} = u \cdot \vec{e}_3$ . Les nœuds situés sur une ligne de l'axe  $y$  (de coordonnées  $(0, y, 0)$ ) sont bloqués selon la direction  $z$ , avec un déplacement écrit  $\vec{u} = u \cdot \vec{e}_2$ . Les autres faces de bord et appartenant aux frontières des perçages sont libres de contraintes.

Dans le cadre de la modélisation Arlequin, le substrat définit la plaque stratifiée sans perçage, où chaque pli est discrétisé. Le maillage du modèle substrat est constitué de  $24 \times 10 \times 6 = 1440$  éléments briques tri-linéaires (le pli à  $90^\circ$ , situé au milieu, comportant deux couches d'éléments dans l'épaisseur). Le matériau, utilisé pour chaque pli de ce

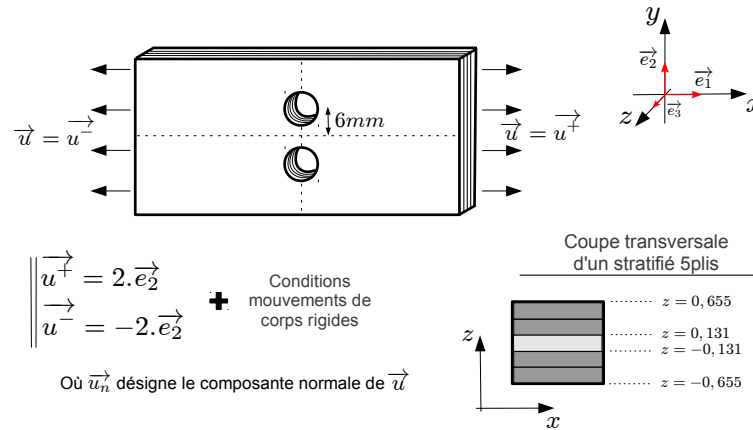


Figure 4.15 — Schéma de modélisation d'une plaque stratifiée avec deux perçages.

Matériau : T700 / M21		
$E_l$	115GPa	Module longitudinal
$E_t$	8,5GPa	Module transverse
$\nu_{lt}$	0,32	Coefficient de Poisson longitudinal
$\nu_{tt}$	0,51	Coefficient de Poisson transverse
$G_{lt}$	9GPa	Module cisaillement

Figure 4.16 — Tableau des propriétés du T700 / M21.

modèle, est du T700 / M21 dont les caractéristiques sont données dans le tableau (4.16). Ce matériau est supposé avoir un comportement élastique homogène, anisotrope. Le modèle patch représente une plaque rectangulaire, de surface moyenne mesurant  $40mm \times 32mm$ , possédant la même discrétisation des plis que le substrat dans l'épaisseur. Le modèle patch intègre deux perçages et utilise une loi de comportement T700 / M21, *endommageable* homogène et anisotrope pour chaque pli (cf tableau 4.17). Le maillage de la zone libre du patch est raffiné aux bords des perçages et est constitué de 177 744 éléments prisme tri-linéaires. Dans la zone de collage, les éléments utilisés sont des briques tri-linéaires. Le nombre important d'éléments permet de représenter plus fidèlement l'évolution de l'endommagement.

On montre les résultats de simulation de la plaque stratifiée pour les deux valeurs d'endommagement ( $d_1, d_2$ ) pour le chargement en traction selon la direction  $\vec{e}_1$ . Le problème est résolu en 50 incréments de temps avec 2-3 itérations de Newton-Raphson à chaque pas de temps. Les figures (4.18) montrent l'évolution de l'endommagement de la matrice, noté  $d_2$ , à différents incréments du calcul en bord de perçages. On constate que l'endommagement interfibres apparaît dans les plis à  $0^\circ$ , puis se propage au pli à  $90^\circ$ , avant de s'étendre de façon linéaire dans le sens du chargement. Cette évolution linéaire, aussi appelée "*splitting*", est visible sur les figures (4.19), où l'on observe le champ de la variable  $d_2$  sur l'ensemble du patch à différentes étapes du calcul.

L'évolution de l'endommagement interfibres obtenu par simulation numérique et similaire à celle observée expérimentalement [79] (cf figure 4.20). Avec l'endommagement de la matrice, apparaît l'endommagement des fibres, représenté par le paramètre  $d_1$ . Pour ce pro-



Matériau : T700 / M21 endommageable		
Propriétés élastique		
$E_l$	115GPa	Module longitudinal
$E_t$	8,5GPa	Module transverse
$\nu_{lt}$	0,32	Coefficient de Poisson longitudinal
$\nu_{tt}$	0,51	Coefficient de Poisson transverse
$G_{lt}$	9GPa	Module cisaillement
Contraintes à rupture		
$X_t$	2000MPa	Résistance des fibres en traction
$X_c$	-1300MPa	Résistance des fibres en compression
$Y_t$	76MPa	Résistance interfibres en traction
$Y_c$	-260MPa	Résistance interfibres en compression
$S_c$	81MPa	Résistance en cisaillement
cinétiques		
$\alpha$	10	facteur cinétique de la rupture des fibres
$\beta$	10	facteur cinétique de la rupture interfibres
Coefficients des tenseurs d'effets		
$h_{11_t}$	2,	
$h_{11_c}$	0,	
$h_{55}$	0,084641	
$h_{66_{ff}}$	0,129174	
$h_{22_t}$	1,	
$h_{22_c}$	0,	
$h_{44}$	0,280699	
$h_{66_{iff}}$	0,422462	

**Figure 4.17** — Tableau des propriétés du T700 / M21 endommageable.

blème, on constate que la rupture des fibres se produit plus tardivement au niveau des bords de perçages, mais uniquement dans les plis à 90°(cf figure 4.21).

Dans ce test, on a mis en évidence la possibilité d'utiliser la méthode Arlequin pour coupler deux modèles ayant des lois de comportement différentes. Ainsi, pour de grandes structures, on peut employer une loi de comportement endommageable de façon localisée ; le modèle substrat global pouvant utiliser un modèle de comportement plus simple et ainsi limiter les coûts de calculs non-linéaires. De plus, on a montré, pour le cas étudié, que les résultats obtenus par simulations numériques sont cohérentes avec ceux observées expérimentalement. Après avoir démontré qu'il est possible d'utiliser la méthode Arlequin pour réduire les coûts d'un problème d'endommagement localisé, poursuivons notre étude avec de l'endommagement entre plis.



(a) 5ème incrément

(b) 7ème incrément

(c) 9ème incrément

(d) 11ème incrément

**Figure 4.18** — Évolution du champ de la variable d'endommagement de la matrice au bord d'un perçage.

(a) 5ème incrément

(b) 10ème incrément

(c) 15ème incrément

(d) 20ème incrément

**Figure 4.19** — Évolution du champ de la variable d'endommagement de la matrice sur l'ensemble du patch.

**Figure 4.20** — Figures de comparaison avec une simulation éléments finis monomodèle et un essai expérimental [79].

(a) 20ème incrément

(b) 23ème incrément

(c) 30ème incrément

**Figure 4.21** — Évolution du champ de la variable de rupture des fibres sur le patch.

## 4.5 Essai de délaminage

Cette section est dédiée à la mise en application de technique Arlequin pour la simulation des phénomènes de dégradations entre les plis (délaminage). Pour simuler ces phénomènes de délaminages, on utilise ici des modèles de zones cohésives dont la bonne approximation numérique nécessite des discrétisations très fines. Cette exigence locale est prise en compte par la méthode Arlequin en superposant un modèle local très raffiné (le patch) à un modèle grossier (le substrat) dans la zone de délaminage.

Pour montrer la faisabilité de cette approche, nous considérons l'essai expérimental, le plus couramment utilisé pour étudier le délaminage, à savoir l'essai DCB (**D**ouble-**C**antilever **B**eam). Il consiste à charger une poutre stratifiée délaminée transversalement, dans un sens orthogonal à la fissure d'interface (cf figure de gauche 4.22) et à étudier la propagation de ce délaminage initial.

Nous proposons ici de modéliser ce test dans le cadre Arlequin en deux dimensions.

### 4.5.1 Loi d'interface

De façon identique à un phénomène de fissuration, la décohésion entre les plis se déroule en deux étapes : l'amorçage et la propagation. L'approche choisie pour décrire le délaminage des stratifiés correspond aux modèles éléments finis de zones cohésives, basés sur la description entre les sauts de déplacement de deux nœuds, initialement superposés, avec les efforts cohésifs (cf figure du milieu 4.22).

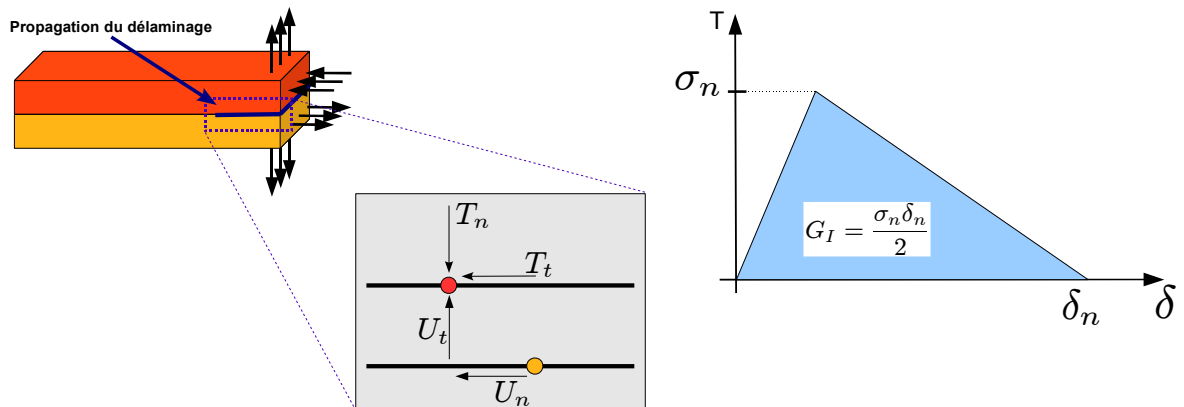


Figure 4.22 — Description modèle de zone cohésive.

Ces éléments possèdent une loi de comportement adoucissante qui caractérise le déplacement d'ouverture  $\delta$  des nœuds superposés (cf figure de droite 4.22). Il existe plusieurs formes de lois adoucissantes (bilinéaire [1], multi-linéaire, exponentielle [127], trapézoïdale [36] ou encore polynomiale [89]) dont les variations apparaissent sur des parties différentes (cf figure 4.23). En général, une loi adoucissante se divise en trois phases définies en fonction du paramètre de contrainte critique  $\sigma_c$  et de la ténacité  $G_c$ , représentant l'aire sous la courbe.

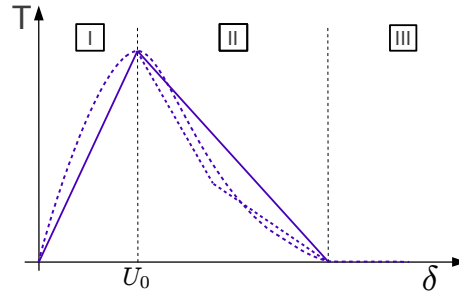


Figure 4.23 — Division et modèles de loi adoucissante.

La première partie représente l'augmentation de la contrainte interlaminaire jusqu'à atteindre la valeur critique  $\sigma_c$ . L'évolution du comportement est, ici, élastique linéaire. Ensuite, la seconde partie traduit une perte de rigidité d'interface par une décroissance de la courbe jusqu'à une rigidité nulle. La troisième partie correspond, suite à la rupture interlaminaire, à la possibilité d'un déplacement sans effort.

Dans le modèle bilinéaire de Crisfield [1], que nous avons retenu pour un chargement d'interface en traction, l'évolution du dommage est représentée par la variable d'endommagement  $\lambda$  définie en fonction de l'ouverture due à la traction et au cisaillement par l'équation suivante :

$$\lambda = \frac{1}{\mu} \frac{\langle \kappa \rangle^+}{1 + \langle \kappa \rangle^+}, \quad \kappa = \sqrt{\left( \frac{\langle U_n \rangle^+}{U_{0n}} \right)^2 + \left( \frac{U_{t1}}{U_{0t1}} \right)^2 + \left( \frac{U_{t2}}{U_{0t2}} \right)^2} + 1 \quad (4.20)$$

$$, \mu = 1 - \frac{U_{0n}}{\delta_n} = 1 - \frac{U_{0t1}}{\delta_{t1}} = 1 - \frac{U_{0t2}}{\delta_{t2}} \quad (4.21)$$

avec  $(U_n, U_{t1}, U_{t2})$  qui caractérise le déplacement normal, tangentiel dans le plan et tangentiel hors-plan ainsi que  $(\delta_n, \delta_{t1}, \delta_{t2})$  qui représente les déplacements d'ouverture. Les paramètres  $(U_{0n}, U_{0t1}, U_{0t2})$  représente les déplacements d'ouvertures relatifs à la traction cohésive maximale pour les composantes normale et de cisaillement (cf  $U_0$  sur la figure 4.23). La notation  $\langle \cdot \rangle_+$  étant les crochets de Macaulay, utilisés pour décrire une fonction rampe. À l'aide de cette variable d'endommagement, il est possible d'obtenir les relations non-linéaires entre les déplacements  $(U_n, U_{t1}, U_{t2})$  et les contraintes  $(T_n, T_{t1}, T_{t2})$ .

$$\begin{cases} T_n = \frac{U_n}{U_{0n}} F(\lambda_{max}) \\ T_{ti} = \alpha_i \frac{U_{ti}}{U_{0ti}} F(\lambda_{max}), \quad i = \{1, 2\} \end{cases} \quad \text{où} \quad F(\lambda) = \sigma_{max}(1 - \lambda) \quad (4.22)$$

avec  $0 \leq \lambda \leq 1$ . Les termes  $\sigma_{max}$  et  $\alpha \sigma_{max}$  représentent les valeurs critiques de contraintes normale et tangentielle en modes pures. Le paramètre  $\lambda$  évoluant de 0 à 1 traduit la transition entre l'état intègre et rompu de l'interface. De plus, la fonction  $F(\lambda) = 0$  lorsque le paramètre  $\lambda = 1$ , permettant alors que les sauts de solution  $\delta_n, \delta_{t1}, \delta_{t2}$  soient maximaux pour les déplacements  $U_n, U_{t1}, U_{t2}$  et que les contraintes s'annulent.

Bien que permettant de représenter efficacement les phénomènes de dégradation d'interface (tels que le délaminage), les modèles cohésifs font apparaître plusieurs difficultés dans

les modèles numériques. Une discrétisation d'espace particulièrement fine est requise dans la zone d'évolution de l'endommagement (appelée généralement "*process zone*") et le caractère fortement non linéaire conduit à utiliser des incréments de chargement très petits. Le tout conduisant à des coûts de calculs extrêmement importants (cf thèse de T. Vandellos [120, 121]).

## 4.5.2 Simulation d'un essai de DCB en deux dimensions

On examine les possibilités de la méthode Arlequin sur le cas d'un essai, DCB, de propagation de délaminage en deux dimensions. Ce cas est basé sur une poutre de huit plis, chacun de  $0,375\text{mm}$  d'épaisseur. La poutre rectangulaire a pour dimensions  $140\text{mm}$  de long pour  $3\text{mm}$  d'épaisseur. Afin de faciliter et de diriger le délaminage, on considère un décollement, entre les plis médians, au niveau de l'extrémité, de normale  $\vec{e}_1$ . La poutre est soumise à un chargement d'ouverture avec deux déplacements, égaux en module mais opposés en sens  $\vec{u}^+, \vec{u}^-$ , de normale  $\vec{e}_2$  et  $-\vec{e}_2$  imposé aux niveaux des points A et B (cf figure 4.24). Pour limiter les mouvements de corps rigides, on impose un déplacement nul,  $\vec{u}_0$ , selon la direction  $y$  au niveau des points C et D, de l'extrémité opposée.

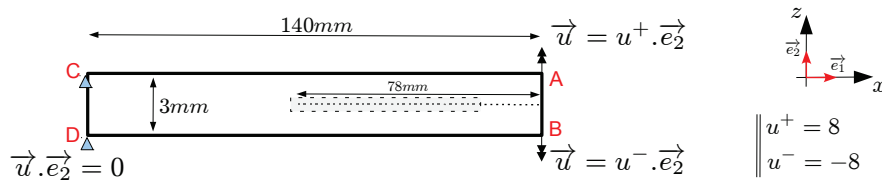


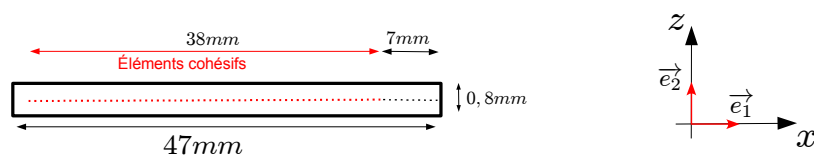
Figure 4.24 — Schéma de modélisation d'un modèle substrat de l'essai DCB en 2D.

Dans le cadre Arlequin, le modèle numérique est réalisée avec un maillage substrat qui représente la poutre globale et un modèle patch, avec un maillage très fin, qui permet l'emploi d'éléments de zones cohésives au niveau de l'interface qui s'endommage. Le maillage du modèle substrat est constitué de  $70 \times 8 = 540$  éléments rectangle bi-linéaires. Ce maillage est préfissuré sur  $78\text{mm}$  (cf figure 4.24). Le matériau utilisé pour chaque pli est du XAS / 914C (cf tableau 4.25) élastique homogène et anisotrope.

Pour cette simulation, le patch a pour dimensions  $46\text{mm} \times 0,8\text{mm}$ . Le patch est préfissuré sur une longueur de  $7\text{mm}$  puis, comporte une bande de  $38\text{mm}$  d'éléments de zones cohésives (cf figure 4.26). Ces éléments sont placés au niveau de l'interface de l'axe médian, puisque

Matériau : XAS / 914C		
$E_l$	138GPa	Module longitudinal
$E_t$	9,4GPa	Module transverse
$\nu_{lt}$	0,32	Coefficient de Poisson longitudinal
$\nu_{tt}$	0,32	Coefficient de Poisson transverse
$G_{lt}$	6,7GPa	Module cisaillement

Figure 4.25 — Tableau des propriétés du XAS / 914C.



**Figure 4.26** — Schéma de modélisation d'un modèle patch de l'essai DCB en 2D.

Modèle d'interface		
$K$	$1.e^5 N.mm^{-3}$	Raideur d'interface
$\sigma_{max}$	5MPa	Résistance
$\tau_{max}$	10MPa	Résistance
$G_{Ic}$	$400 J/m^2$	Ténacité mode I
$G_{IIc}$	$1450 J/m^2$	Ténacité mode II
$\alpha$	10	Facteur de pénalisation en compression

**Figure 4.27** — Tableau des propriétés de l'interface.

le délaminage suit l'interface entre ces deux plis. Ce maillage est constitué de 4448 éléments rectangle bi-linéaires ainsi que 304 éléments de zones cohésives linéaire à 4 nœuds (i2d4). Le modèle de comportement du patch est identique au modèle substrat et les éléments de zones cohésives ont un comportement d'interface de type bilinéaire dont les données sont rassemblées dans le tableau (4.27). Les caractéristiques choisies pour le comportement de l'interface sont similaires à celle employées dans les démonstrations mais demeurent plus faibles que celles employées pour des simulations réalistes. Cette différence s'explique par le choix de démontrer la possibilité de cette modélisation sans surcharger le modèle patch d'une discrétisation très raffinée. Les deux maillages se superposent (cf figure 4.24), de façon à permettre que le délaminage soit représenté uniquement sur le modèle patch (cf figure 4.28). La simulation reste dans le domaine des petites perturbations.

**Figure 4.28** — Maillages des deux modèles pour l'essai DCB en 2D.

Le problème est résolu en 800 incréments de calcul. L'évolution du délaminage est représentée en six étapes par des cartes de champs de déplacements selon l'axe y (cf figure 4.29).

Ces images, représentant le champ de déplacement  $U_y$  montrent que la propagation du délaminage est simulée de façon graduelle. Ce décollement est modélisé par des éléments de zones cohésives qui nécessitent une discrétisation très fine. L'utilisation de la méthode

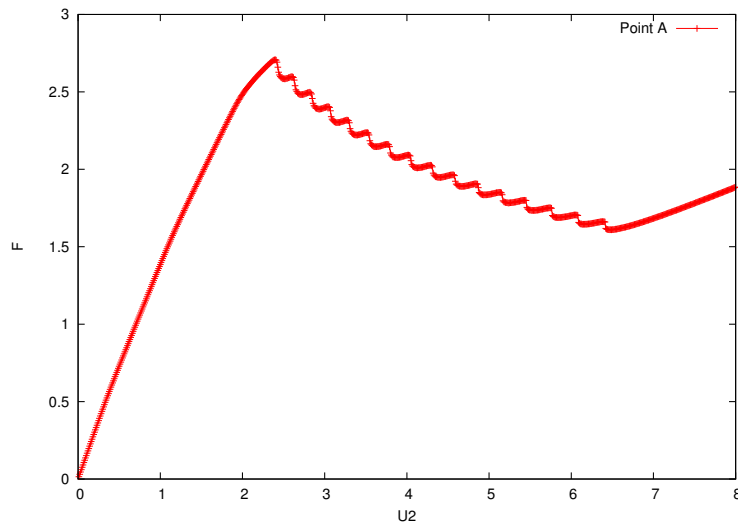
(a)  $U_y = 1,33$ (b)  $U_y = 2,66$ (c)  $U_y = 4$ (d)  $U_y = 5,33$ (e)  $U_y = 6,66$ (f)  $U_y = 8$ **Figure 4.29** — Champ de déplacement sur le modèle patch avec propagation du délaminage

Arlequin permet d'insérer un patch sur un modèle grossier possédant une modélisation suffisante pour représenter les plis du stratifié. La discrétisation du patch est ensuite choisie assez fine autour de l'interface entre les plis qui se décolle pour éviter les problèmes de divergence de calcul. Les éléments de zones cohésives se rompent lorsque le déplacement entre deux nœuds est trop important. L'avancée du délaminage est réalisée avec la rupture de ces éléments est illustrée sur trois figures (4.30).

(a)  $U_y = 1,33$ (b)  $U_y = 2,66$ (c)  $U_y = 3,33$ **Figure 4.30** — Représentation des éléments rompus lors de la propagation du délaminage

Il est aussi possible d'observer le comportement de la structure à partir de la courbe

d'effort en fonction du déplacement, au point A (cf figure 4.31).



**Figure 4.31** — Courbe de la force  $F_y$  en fonction du déplacement  $U_y$  au point A.

Sur cette courbe, nous constatons, dans un premier temps, le comportement élastique de la structure avec un début d'endommagement à partir d'une valeur de déplacement égale à 2. Dans un second temps, nous notons la réduction de la force  $F_y$ , par palier, représentant la propagation du délaminage suite aux ruptures des éléments de zones cohésives. Cette descente en palier peut être lissée en optant pour une discrétisation encore plus fine au niveau de l'interface. Dans un dernier temps, à partir de la valeur de déplacement 6, 4, la structure se rigidifie, suite à la rupture complète de l'ensemble des éléments de zones cohésives incorporés dans le modèle patch.

Les éléments de zone cohésive, qui permettent de simuler le délaminage entre les plis, nécessitent une description très fine qui peut rapidement devenir problématique pour des cas de structures complexes. La faculté de limiter l'emploi de discrétisations raffinées uniquement aux zones d'intérêts devient indispensable. La méthode Arlequin prouve qu'elle peut être utilisée afin de faciliter la simulation du délaminage avec des éléments de zones cohésives, qui nécessitent une taille de maille extrêmement fine sur des structures de grandes dimensions.



## 4.6 Bilan

Dans ce chapitre, on teste l'utilisation de la méthode Arlequin pour modéliser et simuler quatre différents cas représentatifs de structures composites stratifiées. On évalue d'abord le collage entre deux modélisations de stratifiés avec l'application d'un paramètre anisotrope dans l'opérateur de couplage. On compare les champs de contraintes à une modélisation monomodèle de référence. Ensuite, on teste le couplage entre un substrat, possédant un modèle de comportement homogénéisé dans l'épaisseur et un modèle patch, représenté à l'échelle mésoscopique. Cette modélisation, bien que limitée en application, permet, aussi, de représenter correctement les champs de contraintes importants. Le troisième cas représentatif concerne les modèles d'endommagements mésoscopiques qui tiennent compte des ruptures de fibres et interfibres. On constate que le couplage entre un substrat, ayant un modèle de comportement élastique, et un patch, possédant un modèle de comportement endommageable, reproduit l'évolution des dommages obtenue dans les essais expérimentaux ou les simulations numériques monomodèles sur l'ensemble de la structure stratifiée. Suite à l'endommagement des plis, on réalise un cas test de rupture d'interface très commun, l'essai DCB. Cet essai de caractérisation d'amorçage et de propagation du délaminage est modélisé par l'intermédiaire d'éléments de zones cohésives. L'utilisation de la méthode Arlequin permet de faciliter la génération de la discrétisation nécessaire à la stabilité requise par l'emploi de ce type d'éléments.



---

# Conclusion

L'ENSEMBLE de nos développements s'est axé autour de la mise en œuvre de la méthode multiéchelle Arlequin, dans le code de calcul Z-set/ZéBuLoN. Nous nous sommes attachés, plus particulièrement, à délivrer un outil capable de répondre de façon robuste et efficace aux problématiques de modélisations multiéchelles requises par des utilisateurs non spécialistes dans un contexte de bureau d'étude. En effet, ces développements ont été menés afin de traiter des problèmes mécaniques représentatifs de ceux rencontrés dans l'industrie aéronautique pouvant, par exemple, comporter des détails géométriques particuliers ou employant des lois de comportement complexes. Néanmoins, ces travaux ont aussi tenu compte de contraintes de performances et de coûts de calcul afin que l'utilisation d'une telle méthode soit compétitive par rapport aux méthodes existantes. Ces différents besoins ont conduit à axer ces travaux de thèse selon certaines orientations.

L'utilisation de la méthode Arlequin pour concevoir ou analyser des structures réalistes, a imposé que la mise en œuvre soit réalisée de la façon la plus générale possible. Ainsi, il était nécessaire que la méthode soit capable de coupler des modèles aux maillages incompatibles. Cet impératif impose des développements d'outils et de stratégies spécifiques, tels que la génération d'une règle d'intégration adaptée ou l'utilisation d'opérateurs de projection de champs pour des maillages différents. De plus, afin de faciliter l'usage de la méthode Arlequin, nous avons développé un outil spécifique de génération de patches, pour simplifier la modélisation. Le temps d'exécution de ces calculs, devant être optimisé pour correspondre aux impératifs industriels, nous avons prolongé l'écriture du système Arlequin afin qu'il puisse être résolu avec des machines à architectures partagées, en parallèle, en bénéficiant de solveurs itératifs. Cette mise en œuvre générique a permis de poser de solides bases pour traiter efficacement des problèmes de structures mécaniques complexes.

Dans le cadre de la méthode Arlequin mixte, l'emploi d'un champ de multiplicateur pour coller les modèles, augmente le nombre d'inconnues. En outre, le système mixte généré, nécessite l'emploi de méthodes de résolution capables de traiter des opérateurs symétriques non-définis positifs. Dans le cadre de résolutions séquentielles, nous avons exclusivement utilisé le solveur Mumps, avec une stratégie de sélection de pivots. Pour les résolutions multiprocessus, l'utilisation de solveurs multithreadés ne s'est pas avérée efficace pour la factorisation de l'opérateur. Elle peut, cependant, accélérer l'intégration des différents termes composant le système. La solution pour résoudre des systèmes Arlequin de taille conséquente, i.e., possédant un grand nombre d'inconnues, est d'utiliser les résolutions parallèles avec des solveurs itératifs. Nous avons donc mis en œuvre la méthode Arlequin pour des résolutions parallèles, en rapprochement des méthodes de décomposition de domaines, pour accroître les capacités de la méthode Arlequin à résoudre des calculs hautes performances. Ainsi, cette méthode, en plus d'être robuste et générale, devient performante en terme de coûts et de temps de calcul.

Enfin, l'ensemble de ces développements a permis de tester l'apport de la méthode Arlequin pour simuler des problèmes à l'aide de modélisations complexes dans le domaine des structures composites stratifiées. Ainsi, après avoir vérifié le couplage entre modèles anisotropes, nous avons pu relier des modèles représentant chaque pli avec des modèles possédant un comportement homogénéisé macroscopiquement dans l'épaisseur. L'emploi de ce type de comportement, bien que limité en applications, permet de diminuer sensiblement le nombre d'inconnues dans les zones dénuées d'intérêt. Nous avons aussi testé l'utilisation de la méthode Arlequin pour représenter des phénomènes non linéaires d'endommagement de façon localisée. Il devient ainsi possible d'utiliser, dans Z-set/ZéBuLoN, une méthode multi-échelle pour limiter significativement la complexité de modélisation numérique dans les structures composites, tout en représentant fidèlement les zones où apparaissent et évoluent les phénomènes de dégradations (ruptures fibres, interfibres, délaminage, etc.).

Ces travaux offrent de nombreuses perspectives à différents niveaux et dans différents horizons. Dans le domaine de la mécanique de la rupture, ce type de méthode doit permettre de pouvoir calculer, avec une meilleure précision, les paramètres énergétiques (taux de restitution d'énergie et facteur d'intensité des contraintes) en associant des patches à l'aide de maillages réguliers en front de fissure (là où les solutions issues de discrétisation résultantes de mailleurs libres en X-FEM ou représentation conforme peuvent être mis en défaut et où des erreurs de transfert de champs apparaissent, avec des conséquences pouvant être rédhibitoire dans des problèmes élastoplastiques). De façon plus applicative, dans le cadre des approches adaptatives locales, l'utilisation de patches permet d'apporter une grande flexibilité, en assurant un raccord non-conforme avec la zone d'intérêt, on envisage de mettre en œuvre des méthodes permettant de faire évoluer dynamiquement la position des patches au cours de la simulation pour suivre les phénomènes de dégradation. Ce type de méthode peut avoir un intérêt majeur dans l'étude de la transition endommagement/rupture sur des problèmes 3D complexes, où le caractère non-local des modèles requière une finesse de maillage particulièrement importante dans une zone très localisée en évolution.

---

# Bibliographie

- [1] G. ALFANO et M. CRISFIELD, *Finite element interface models for the delamination analysis of laminated composites : mechanical and computational issues.*, Int. J. Num. Meth. Engng., vol. 50, pp. 1701–1736, 2001.
- [2] P. AMESTOY, I. DUFF et J. L'EXCELLENT, *Multifrontal parallel distributed symmetric and unsymmetric solvers.*, Comput. Methods. Appl. Mech. Engng., vol. 184, pp. 501–520, 2000.
- [3] I. BABUSKA et B. GUO, *The h-p version of the finite element method, part i : the basic approximation results*, Comput. Mech., vol. 1, pp. 21–41, 1986.
- [4] I. BABUSKA et W. RHEINBOLDT, *Error estimates for adaptative finite element computation.*, SIAM J. Num. Anal., vol. 15, pp. 736–754, 1978.
- [5] I. BABUSKA, B. A. SZABO et I. N. KATZ, *The p version of the finite element method*, J. Num. Anal., SIAM, vol. 18, pp. 512–545, 1981.
- [6] S. BALAY, W. G. ANS L. MCINNES et B. SMITH, *The Portable, Extensible Toolkit for Scientific Computing.*, version 2.0.13, [http ://www.msc.anl.gov/petsc](http://www.msc.anl.gov/petsc), Code et documentation, 1996.
- [7] R. E. BANK, *The efficient implementation of local mesh refinement algorithms*, dans *Adaptive Computational Methods for Partial Differential Equations*, (pp. 74–84), SIAM, Philadelphia, 1983.
- [8] P. BAUMAN, H. BENDHIA, N. ELKHODJA et J. ODEN, *On the application of the arlequin method to the coupling of particle and continuum models.*, Compt. Mech., vol. 42, pp. 511–530, 2008.
- [9] P. BAUMAN, J. ODEN et S. PRUDHOMME, *Adaptive multiscale modeling of polymeric materials with arlequin coupling and goals algorithms.*, Comput. Methods Appl. Mech. Engng., vol. 198, pp. 799–818, 2009.
- [10] E. BECHET, H. MINNEBO, N. MOËS et B. BURGARDT, *Improved implementation and robustness study of the x-fem for stress analysis around cracks*, Int. J. Numer. Meth. Engng., vol. 64, pp. 1033–1056, 2005.
- [11] T. BELYTSCHKO et T. BLACK, *Elastic crack growth in finite elements with minimal remeshing*, Int. J. Numer. Meth. Engng., vol. 45, no. 5, pp. 601–620, 1999.
- [12] H. BENDHIA, *Problèmes mécaniques multi-échelles : la méthode arlequin*, C. R. Acad. Sci. Paris, vol. série II b, no. 326, pp. 899–904, 1998.

- [13] H. BENDHIA, *Numerical modelling of multiscale mechanical problems : the arlequin method*, dans *European Conference on Computational Mechanics*, (pp. 757–766), München, Germany, 1999.
- [14] H. BENDHIA, *Further insights by theoretical investigations of the multiscale arlequin method.*, Int. J. Numer. Mech. Eng., vol. 6, pp. 215–232, 2008.
- [15] H. BENDHIA, N. ELKHODJA et F. ROUX, *Multimodeling of multi-alterated structures in the arlequin framework. solution with a domain-decomposition solver.*, Compt. Mech., vol. 11, no. 4, pp. 969–980, 2008.
- [16] H. BENDHIA et G. RATEAU, *The arlequin method as a flexible engineering design tool.*, Int. J. Numer. Mech. Eng., vol. 11, no. 62, pp. 1442–1462, 2005.
- [17] H. BENDHIA et O. JAMOND, *On the use of xfem within the arlequin framework for the simulation of crack propagation.*, Comput. Methods Appl. Mech. Engng., vol. 199, no. 21-22, pp. 1403–1414, 2010.
- [18] H. BENDHIA et G. RATEAU, *Analyse mathématique de la méthode arlequin mixte*, C. R. Acad. Sci. Paris, vol. série I, no. 332, pp. 649–654, 2001.
- [19] H. BENDHIA et G. RATEAU, *Application of the arlequin method to some structures with defects*, FE Europ. Review, vol. 11, no. 2-3-4, pp. 291–304, 2002.
- [20] H. BENDHIA et M. TORKHANI, *Modeling and computation of fretting wear of structures under sharp contact.*, Int. J. Numer. Mech. Eng., vol. 85, pp. 61–83, 2011.
- [21] H. BENDHIA et C. ZAMMALI, *Level-sets and arlequin framework for dynamic contact problems.*, Rev. Europ. Elt. Finis., vol. 13, pp. 403–414, 2004.
- [22] H. BENDHIA et M. ZARROUG, *Contact in the arlequin framework.*, Contact Mechanics, (pp. 401–410), 2001.
- [23] J. BERTHELOT, *Matériaux composites, Comportement mécanique et analyse des structures.*, Édition Masson Paris, 1992.
- [24] F. BREZZI, J. L. LIONS et O. PIRONNEAU, *Analysis of a chimera method.*, CR. Acad. Sci. Paris., vol. 332, no. I, pp. 655–660, 2001.
- [25] X. C. CAI et Y. SAAD, *Overlapping domain decomposition algorithms for general sparse matrices.*, Num. Lin. Alg. Applic., vol. 3, pp. 221–237, 1996.
- [26] X. C. CAI et M. SARKIS, *A restricted additive schwarz preconditionner for general sparse linear systems.*, J. Sci. Comput., SIAM, vol. 21, no. 2, pp. 792–797, 1999.
- [27] F. CALEYRON, Y. CHUZEL-MARMOT et A. COMBESURE, *Modeling of reinforced concrete through sph-fe coupling and its application to the simulation of a projectile's impact onto a slab.*, Int. J. Num. Meth. Biomed. Engng., vol. 27, no. 6, pp. 882–898, 2011.
- [28] L. CHAMOIN, S. PRUDHOMME, H. BENDHIA et J. ODEN, *Ghost forces and spurious effects in atomic-to-continuum coupling methods by the arlequin approach.*, Int. J. Numer. Mech. Eng., vol. 83, pp. 1081–1113, 2010.
- [29] J. J. CHATTOT et Y. WANG, *Improved treatment of intersecting bodies with the chimera method and validation with a simple and fast flow solver.*, Comput. Fluid., vol. 27, no. 5-6, pp. 721–740, 1998.

- [30] Y. CHUZEL-MARMOT, R. ORTIZ et A. COMBESCURE, *Three dimensional sph-fem gluing for simulation of fast impacts on concrete slabs.*, Comput. Struct., 2011.
- [31] P. CIARLET, *The finite element method for elliptic problems.*, vol 1, Amsterdam : North-Holland, 1978.
- [32] R. COTTEREAU, D. CLOUTEAU, , H. BENDHIA et C. ZACCARDI, *A stochastic-deterministic coupling method for continuum mechanics.*, Compt. Meth. Appl. Mech. Eng., vol. 200, no. 47-48, pp. 3280–3288, 2011.
- [33] C. DAUX, N. MOËS, J. DOLBOW, N. SUKUMAR et T. BELYTSCHKO, *Arbitrary branched and intersecting cracks with the extended finite element method*, Int. J. Numer. Meth. Engng., vol. 48, pp. 1741–1760, 2000.
- [34] J. DOLBOW, N. MOËS et T. BELYTSCHKO, *Discontinuous enrichment in finite elements with a partition of unity method*, Finite Elem. Anal. Des., vol. 36, pp. 235–260, 2000.
- [35] M. DRYJA et O. WIDLUND, *An additive variant of the schwarz alternating method for the case of many subregions.*, Technical report 339, 1987.
- [36] D. DUGDALE, *Yielding of steel sheets containing slits.*, J. Mech. Phys. Solids., vol. 8, pp. 100–102, 1960.
- [37] N. ELKHODJA, *Approches de structures complexes dans des cadres adaptés de la méthode Arlequin.*, Thèse de doctorat, Ecole Centrale de Paris, 2010.
- [38] C. FARHAT et F. ROUX, *A method of finite tearing and interconnecting and its parallel solution algorithm.*, Int. J. Num. Meth. Eng., vol. 32, pp. 1205–1227, 1991.
- [39] S. FELD-PAYET, *Amorçage et propagation de fissure dans les milieux ductiles non locaux*, Thèse de doctorat, Ecole des Mines de Paris, 2010.
- [40] S. FELD-PAYET, J. BESSON et F. FEYEL, *Finite element analysis of damage in ductile structures using a nonlocal model combined with a three-field formulation*, Int. J. Damage. Mech., vol. 20, pp. 655–680, 2011.
- [41] J. FISH, *The s-version of the finite element method*, Computers. and Structures., vol. 43, no. 3, pp. 539–547, 1992.
- [42] J. FISH et R. GUTTAL, *The s-version of the finite element method for laminates composites*, Int. J. Numer. Meth. Engng., vol. 39, pp. 3641–3662, 1996.
- [43] J. FISH et S. MARKOLEFAS, *The s-version of the finite element method for multilayer laminates*, Int. J. Numer. Meth. Engng., vol. 33, pp. 1081–1105, 1992.
- [44] M. FLEMING, Y. A. CHU, B. MORAN et T. BELYTSCHKO, *Enriched element-free galerkin methods for crack tip fields*, Int. J. Numer. Meth. Engng., vol. 40, pp. 1483–1504, 1997.
- [45] L. GENDRE, *Approche globale/locale non-intrusive : application aux structures avec plasticité locale*, Thèse de doctorat, Ecole Normale Supérieure de Cachan, 2009.
- [46] L. GENDRE, O. ALLIX, P. GOSSELET et F. COMTE, *Non-intrusive and exact global/local techniques for structural problems with local plasticity*, Comput. Meca., vol. 44, pp. 233–245, 2009.

- [47] P. GOSSELET, *Méthodes de décomposition de domaine et méthode d'accélération pour les problèmes multichamps en mécanique non-linéaire.*, Thèse de doctorat, Université Paris VI - Pierre et Marie Curie (Paris VI), 2003.
- [48] P. GOSSELET et C. REY, *Non-overlapping domain decomposition methods in structural mechanics.*, Archives of Comput. Meth. in Engng., vol. 13, no. 4, pp. 515–572, 2006.
- [49] W. GUI et I. BABUSKA, *The  $h$ ,  $p$  version and  $h$ - $p$  version of the finite element method in 1 dimension. part 1 : The error analysis of the  $p$ -version.*, Numerische Math., vol. 48, pp. 557–612, 1986.
- [50] W. GUI et I. BABUSKA, *The  $h$ ,  $p$  version and  $h$ - $p$  version of the finite element method in 1 dimension. part 2 : The error analysis of the  $h$ -version and  $h$ - $p$  version.*, Numerische Math., vol. 48, pp. 613–657, 1986.
- [51] P. GUIDAULT et T. BELYTSCHKO, *On the  $\mathcal{L}^2$  and the  $\mathcal{H}^1$  couplings for an overlapping domain decomposition method using lagrange multipliers.*, Int. J. Numer. Mech. Eng., vol. 3, no. 70, pp. 322–350, 2007.
- [52] P. A. GUIDAULT, O. ALLIX, L. CHAMPANEY et J. NAVARRO, *Une approche micro-macro pour le suivi de fissure avec enrichissement local*, dans 7ème colloque national en calcul des structures, Giens-France, 2005.
- [53] P. A. GUIDAULT, O. ALLIX, L. CHAMPANEY et J. P. NAVARRO, *A micro-macro approach for crack propagation with local enrichment*, dans 7ème International conference on computational structures technology, Lisbon-Portugal, 2004.
- [54] Z. HASHIN, *Failure criteria for unidirectional fiber composites.*, J. Appl. Mech., vol. 47, pp. 329–334, 1980.
- [55] Z. HASHIN et A. ROTEM, *A fatigue failure criterion for fiber reinforced materials.*, J. Compo. Mat., vol. 7, pp. 448–464, 1973.
- [56] Q. HE, H. HU, S. BELOUETTAR, G. GUINTA, K. YU, Y. LIU, F. BISCANI, E. CARRERA et M. POTIER-FERRY, *Multi-scale modelling of sandwich structures using hierarchical kinematics.*, Compos. Struct., vol. 93, pp. 2375–2383, 2011.
- [57] F. HETCH, A. LOZINSKI et O. PIRONNEAU, *Numerical zoom and the schwarz algorithm.*, dans 18ème International conference on decomposition domain methods, vol. 70, (pp. 63–74), Springer, 2009.
- [58] M. HINTON et D. P. S. A.S. KADDOUR A, *A comparaison of the predictive capabilities of current failure theories for composite laminates, judged against experimental evidence.*, Compo. Sci. Tech., vol. 62, pp. 1725–1797, 2002.
- [59] H. HU, *Modelisation multiéchelle de structures sandwich.*, Thèse de doctorat, Université Paul Verlaine-Metz, 2006.
- [60] H. HU, S. BELOUETTAR, M. POTIER-FERRY et A.-M. DAYA, *Multi-scale modelling of sandwich structures using the arlequin method. part i : Linear modelling.*, Finite Elem. Anal. Des., vol. 45, no. 1, pp. 37–51, 2009.
- [61] H. HU, S. BELOUETTAR, M. POTIER-FERRY, A.-M. DAYA et A. MAKRAZI, *Multi-scale nonlinear modelling of sandwich structures using the arlequin method.*, Compos. Struct., vol. 92, pp. 515–522, 2010.



- [62] H. HU, N. DAMIL et M. POTIER-FERRY, *A bridging technique to analyze the influence of boundary conditions on instability patterns.*, J. Comput. Phys., vol. 230, no. 10, pp. 3753–3764, 2011.
- [63] C. HUCHETTE, *Sur la complémentarité des approches expérimentales et numériques pour la modélisation des mécanismes d'endommagement des composites stratifiés.*, Thèse de doctorat, Université Paris VI - Pierre et Marie Curie (Paris VI), 2005.
- [64] T. HUGUES, *The Finite Element method : Linear Static and Dynamic Finite Element Analysis.*, Dover Publications, 2000.
- [65] F. IRISARRI, *Stratégies de calcul pour l'optimisation multiobjectif des structures composites*, Thèse de doctorat, Université de Toulouse, 2009.
- [66] G. R. IRWIN, *Analysis of stress and strains near the end of a crack traversing a plate*, J. Applied Mech., vol. 24, no. 3, pp. 361–364, 1957.
- [67] O. JAMOND, *Propagation numérique de zones critiques dans un pneumatique par approches multi-modèles.*, Thèse de doctorat, Ecole Centrale de Paris, 2011.
- [68] G. KIRCHHOFF, *Über das gleichgewicht und die bewegung einer elastischen scheibe*, J. Angew. Math., vol. 40, pp. 51–88, 1850.
- [69] E. KITA et N. KAMIYA, *Trefftz method : an overview.*, Advances in Engng. Soft., vol. 24, pp. 3–12, 1995.
- [70] R. KRAUSE et E. RANK, *Multiscale computations with a combination of the h- and p-versions of the finite-element method*, Comput. Methods Appl. Mech. Engng., vol. 192, pp. 3959–3983, 2003.
- [71] P. LADEVÈZE, *Comparaison de modèles de milieux continus.*, Thèse de doctorat, Université Paris VI - Pierre et Marie Curie (Paris VI), 1975.
- [72] P. LADEVÈZE, *Nonlinear Computational Structural Mechanics-New Approaches and Non-Incremental Methods of Calculation.*, Mechanical engineering series, Springer-Verlag, Berlin, 1999.
- [73] P. LADEVÈZE et D. DUREISSEIX, *Une nouvelle stratégie de calcul micro/macro en mécanique des structures*, C. R. Acad. Sci. Paris, vol. série II b, no. 327, pp. 1237–1244, 1999.
- [74] P. LADEVÈZE, O. LOISEAU et D. DUREISSEIX, *A micro-macro and parallel computational strategy for highly heterogeneous structures*, Int. J. Numer. Meth. Engng., vol. 52, pp. 121–138, 2001.
- [75] P. LADEVÈZE et A. NOUY, *A multiscale computational approach for contact problems*, Comput. Methods Appl. Mech. Engng., vol. 191, pp. 4869–4891, 2002.
- [76] P. LADEVÈZE et A. NOUY, *Une stratégie de calcul multiéchelle avec homogénéisation en espace et en temps*, C. R. Meca., vol. 10, no. 330, pp. 683–689, 2002.
- [77] P. LADEVÈZE, J. PASSIEUX et D. NÉRON, *The latin multiscale computational method and the proper generalized decomposition*, Comput. Methods Appl. Mech. Engng., vol. 199, no. 21-22, pp. 1287–1296, 2009.
- [78] F. LAURIN, *Approche multiéchelle des mécanismes de ruine progressive des matériaux stratifiés et analyse de la tenue de structures composites.*, Thèse de doctorat, Université de Franche-Comté, 2005.

- [79] F. LAURIN, N. CARRERE et J. MAIRE, *Strength analysis methods for high stress gradient parts in composite structures ensuring design office requirements*, Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part G : Journal of Aerospace Engineering, vol. 225, no. 3, pp. 291–301, 2011.
- [80] F. LAURIN, N. CARRÈRE et J. MAIRE, *A multiscale progressive failure approach for composite laminates based on thermodynamical viscoelastic and damage models.*, Compo. Part A, vol. 38, pp. 198–209, 2007.
- [81] P. LIONS, *On the schwarz alternating method i*, dans *First Int. Symp. on Domain Decomposition Methods* (R. Glowinski, G.H Golub, G.A. Meurant and J. Periaux, eds), (pp. 1–42), SIAM, Philadelphia, 1988.
- [82] Y. MADAY et F. MAGOULÈS, *Non-overlapping additive schwarz methods tuned to highly heterogeneous media.*, CR. Acad. Sci. Paris., vol. 341, no. I, pp. 701–705, 2005.
- [83] J. MAIRE et J. CHABOCHE, *A new formulation of continuum damage mechanics (cdm) for composite materials.*, Aerospace Science and Technology, vol. 1, pp. 247–257, 1997.
- [84] J. MAIRE et D. PACOU, *Essais de traction-compression-torsion sur tubes composites céramique-céramique.*, C. R. 10. Journ. Nat. Compo. Paris 29-31 Octobre, vol. 3, pp. 1225–1234, 1996.
- [85] J. MANDEL, *Balancing domain decomposition.*, Comput. Appl. Num. Meth. Engng., vol. 9, pp. 233–241, 1993.
- [86] J. M. MELENK et I. BABUSKA, *The partition of unity finite element method : Basic theory and applications*, Comput. Methods Appl. Mech. Engng., vol. 39, pp. 289–314, 1996.
- [87] N. MOËS, J. DOLBOW et T. BELYTSCHKO, *A finite element method for crack growth without remeshing*, Int. J. Numer. Meth. Engng., vol. 46, pp. 131–150, 1999.
- [88] N. MOËS, J. TINSLEY et T. I. ZOHDI, *Investigation of the interactions between the numerical and the modeling errors in the homogenized dirichlet projection method*, Comput. Meth. Appl. Mech. Engng., vol. 159, no. 1-2, pp. 79–101, 1998.
- [89] A. NEEDLEMAN, *A continuum model for void nucleation by inclusion debonding.*, J. Appl. Mech., vol. 54, pp. 525–531, 1987.
- [90] S. NINEB, P. ALART et D. DUREISSEIX, *Approche multiéchelle des systèmes de tenségrité*, dans *7ème colloque national en calcul des structures*, Giens-France, 2005.
- [91] J. T. ODEN, J. T. VEMAGANTI et N. MOËS, *Hierarchical modeling of heterogeneous solids*, Comput. Meth. Appl. Mech. Engng., vol. 172, pp. 345–367, 1999.
- [92] J. T. ODEN et T. I. ZOHDI, *Analysis and adaptive modeling of highly heterogeneous structures*, Comput. Meth. Appl. Mech. Engng., vol. 148, pp. 367–392, 1997.
- [93] H. OKADA, S. ENDOH et M. KIKUCHI, *Application of s-version finite element method to two-dimensional fracture mechanics problems*, J. Solid Mech. and Mat. Engng., vol. 1, no. 5, pp. 699–710, 2007.
- [94] C. PETIPAS, *Analyse et prévision du comportement à long terme des composites fibres de carbone/matrice organique.*, Thèse de doctorat, Université de Franche-Comté, 2000.

- [95] S. PRUDHOMME, H. BENDHIA, P. BAUMAN, N. ELKHODJA et J. ODEN, *Computational analysis of modeling error for the coupling of particle and continuums models by the arlequin method.*, Comput. Methods Appl. Mech. Engng., vol. 197, pp. 3399–3409, 2008.
- [96] S. PRUDHOMME, L. CHAMOIN, H. BENDHIA et P. BAUMAN, *An adaptive strategy for the control of modeling error in two-dimensional atomic-to-continuum coupling simulations.*, Comput. Methods Appl. Mech. Engng., vol. 198, pp. 1887–1901, 2009.
- [97] H. QIAO, Q. YANG, W. CHEN et C. ZHANG, *Implementation of the arlequin method into abaqus : Basic formulations and applications.*, Advances. in Engng. Software., vol. 42, no. 4, pp. 197–207, 2011.
- [98] E. RANK, *Adaptative remeshing and h-p domain decomposition*, Comput. Methods Appl. Mech. Engng., vol. 101, no. 1-3, pp. 299–313, 1992.
- [99] J. RANNOU, *Prise en compte d'effets d'échelle en mécanique de la rupture tridimensionnelle par une approche X-FEM multigrille localisée non-linéaire*, Thèse de doctorat, Institut National des Sciences Appliquées de Lyon, 2008.
- [100] J. RANNOU, A. GRAVOUIL et M. C. BAIETTO-DUBOURG, *Une méthode multigrilles localisée x-fem dédiée à la propagation tridimensionnelle de fissures de fatigue*, Int. J. Numer. Meth. Engng., vol. 77, pp. 581–600, 2009.
- [101] G. RATEAU, *Méthode Arlequin pour les problèmes mécaniques multi-échelles*, Thèse de doctorat, Ecole Centrale de Paris, 2003.
- [102] J. N. REDDY, *A simple higher-order theory for laminated composite plates*, J. Appl. Mech., vol. 51, pp. 745–752, 1984.
- [103] J. N. REDDY, *An evaluation of equivalent-single-layer and layerwise theories of composite laminates*, Compos. Struct., vol. 25, pp. 21–35, 1993.
- [104] J. N. REDDY et D. H. J. ROBBINS, *Modeling of thick composites using a layerwise laminate theory*, Int. J. Numer. Meth. Engng., vol. 36, pp. 655–677, 1993.
- [105] J. N. REDDY et D. H. J. ROBBINS, *Theories and computational models for composite laminates*, Appl. Mech. Rev, vol. 47, no. 6, pp. 147–169, 1994.
- [106] E. REISSNER, *On the theory of bending of elastic plates*, J. Math. Phys., vol. 23, pp. 184–191, 1944.
- [107] E. REISSNER, *Reflections on the theory of elastic plates*, Appl. Mech. Rev., vol. 38, no. 11, pp. 1453–1464, 1985.
- [108] A. SCHIEFFER, *Modélisation multiéchelle du comportement mécanique des composites à matrice organique et effets du vieillissement thermique.*, Thèse de doctorat, Université technologique de Troyes, 2003.
- [109] H. A. SCHWARZ, *Über einen grenzübergang durch alternierendes verfahren.*, dans *Gesammelte Mathematische Abhandlungen*, Springer, vol. 2, (pp. 133–143), Berlin, 1870.
- [110] H. A. SCHWARZ, *Über einen grenzübergang durch alternierendes verfahren.*, Vierteljahrsschrift der Naturforschenden Gesellschaft in Zurich, vol. 15, pp. 272–286, 1870.
- [111] G. SIH et A. SKUDRA, *Failure mechanics of composites.*, vol. 3, Handbook of composites, 1950.

- [112] F. L. STAZI, J. BUDYN, J. CHESSA et T. BELYTSCHKO, *An extended finite element method with higher-order elements for curved cracks*, Comput. Mech., vol. 31, pp. 38–48, 2003.
- [113] J. L. STEGER, F. C. DOUGHERTY et J. A. BENEK, *A chimera grid scheme.*, dans *ASME Mini Symposium on Advances in Grid Generation*, Houston, Texas, 1982.
- [114] T. STROUBOULIS, I. BABUSKA et K. COPPS, *The design and analysis of the generalized finite element method*, Comput. Methods Appl. Mech. Engng., vol. 181, pp. 43–69, 2000.
- [115] N. SUKUMAR, D. L. CHOPP, N. MOËS et T. BELYTSCHKO, *Modeling holes and inclusions by level sets in the extended finite element method*, Comput. Methods Appl. Mech. Engng., vol. 190, no. 46-47, pp. 6183–6200, 2001.
- [116] N. SUKUMAR, N. MOËS, B. MORAN et T. BELYTSCHKO, *Extended finite element method for three-dimensional crack modelling*, Int. J. Numer. Meth. Engng., vol. 48, pp. 1549–1570, 2000.
- [117] E. TREFFTZ, *Ein gegenstück zum ritzschen verfahren.*, dans *2. Int. Kongress für Technische Mechanik*, (pp. 131–137), Zürich, 1926.
- [118] M. TROVALET, P. LADEVÈZE et G. LUBINEAU, *Un modèle micro pour le calcul des structures en composites stratifiés, améliorations et simulations.*, dans *JNC 16*, Toulouse-France, 2009.
- [119] V. TVERGAARD, *Effect of fiber debonding in a whisker-reinforced metal.*, Mat. Sci. Engng. A, vol. 125, pp. 203–213, 1990.
- [120] T. VANDELLOS, *Développement d'une stratégie de modélisation du délaminage dans les structures composites stratifiées, Analyse et prévision du comportement à long terme des composites fibres de carbone/matrice organique.*, Thèse de doctorat, Université Bordeaux 1, 2011.
- [121] T. VANDELLOS, N. CARRERE, C. HUCHETTE et E. MARTIN, *Développement d'une stratégie d'identification d'un nouveau modèle de zones cohésives adapté à l'étude du délaminage dans les composites stratifiés.*, dans *Comptes Rendus des JNC 17*, Poitiers, 2011.
- [122] C. WELLMANN et P. WRIGGERS, *A two-scale model of granular materials.*, Comput. Meth. Appl. Mech. Eng., vol. 205-208, pp. 46–58, 2012.
- [123] J. D. WHITCOMB, *Iterative global/local finite element analysis*, Comput. Struct., vol. 40, pp. 1027–1031, 1991.
- [124] J. D. WHITCOMB et K. WOO, *Application of iterative global/local finite element analysis. part i : Linear analysis*, dans *Communications in Numerical Methods in Engineering*, vol. 9, (pp. 745–756), 1993.
- [125] J. D. WHITCOMB et K. WOO, *Application of iterative global/local finite element analysis. part ii : Geometrically non-linear*, dans *Communications in Numerical Methods in Engineering*, vol. 9, (pp. 757–766), 1993.
- [126] S. XIAO et T. BELYTSCHKO, *A bridging domain method for coupling continua with molecular dynamics.*, Comput. Meth. Appl. Mech. Eng., vol. 193, pp. 1645–1669, 2004.

- [127] X. XU et A. NEEDLEMAN, *Void nucleation by inclusion debonding in a crystal matrix.*, Model. Simul. Mat. Sci. Engng., vol. 1, pp. 111–132, 1993.
- [128] O. ZIENKIEWICZ et J. ZHU, *A simple error estimator and adaptative procedure for practical engineering analysis.*, Int. J. Num. Meth. Engng., vol. 24, pp. 337–357, 1987.
- [129] T. I. ZOHDI, J. T. ODEN et G. J. RODIN, *Hierarchical modeling of heterogeneous bodies with microstructure based pon material regularization*, Comput. Meth. Appl. Mech. Engng., vol. 138, pp. 273–298, 1996.
- [130] T. I. ZOHDI et P. WRIGGERS, *A domain decomposition method for bodies with microstructures based upon material regularized*, Int. J. Solids. Structures., vol. 36, no. 1, pp. 2507–2526, 1999.
- [131] T. I. ZOHDI, P. WRIGGERS et C. HUET, *A method of substructuring large-scale computational micromechanical problems*, Comput. Meth. Appl. Mech. Engng., vol. 190, no. 43-44, pp. 5639–5656, 1999.
- [132] Z-set/Zébulon, *material and structure analysis suite*, <http://www.zset-software.com/>.



# **Annexes**

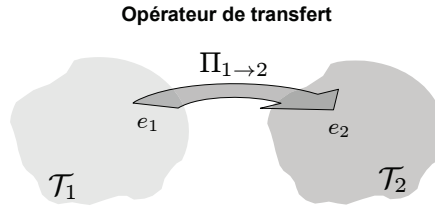




## A

# Projection optimal d'un champ entre deux maillages

Dans nos travaux, le transfert d'un champ entre deux domaines est calculé de façon optimale en utilisant les transferts de type Mortar. Concrètement, considérons un champ  $\vec{e}_1(x) = N_1(x)E_1$  interpolé sur un maillage  $\mathcal{T}^1$  constitué de  $n_1$  nœuds.  $N_1(x)$  étant les fonctions de forme et  $E_1$  le vecteur des valeurs nodales de  $\vec{e}_1(x)$ . On souhaite trouver  $\vec{e}_2(x)$  la projection optimale de ce champ interpolé sur un second espace  $\mathcal{T}^2$ , constitué de  $n_2$  nœuds, et  $N_2(x)$  les fonctions de forme correspondantes (cf figure A.1).



**Figure A.1** — Transfert de champ entre deux domaines aux discrétisations différentes.

L'écriture de la technique Mortar consiste à vérifier l'égalité des champs à l'aide d'une fonction  $\Phi(x)$  :

$$\int_{\mathcal{T}^1} \Phi(x)^T N_1(x) E_1 dV = \int_{\mathcal{T}^2} \Phi(x)^T N_2(x) E_2 dV \quad (\text{A.1})$$

Afin de déterminer le vecteur des inconnues nodales  $E_2$  projeté, on choisit comme fonction  $\Phi(x)$  la fonction de forme  $N_2(x)$  telle que :

$$\int_{\mathcal{T}^{12}} N_2(x)^T N_1(x) E_1 dV = \int_{\mathcal{T}^2} N_2(x)^T N_2(x) E_2 dV \quad (\text{A.2})$$

On constate que l'équation (A.2) reliant les champs utilise un espace  $\mathcal{T}^{12}$  qui est un maillage permettant d'intégrer à la fois les fonctions provenant de l'espace  $\mathcal{T}^1$  mais aussi de l'espace  $\mathcal{T}^2$ . Cet espace peut, par exemple, être obtenu par l'intersection de ces deux domaines (cf annexe B). L'équation précédente traduit une projection de type  $\mathcal{L}^2$  entre les

espaces  $\mathcal{T}^1$  et  $\mathcal{T}^2$ . Il est alors possible de définir l'opérateur de transfert linéaire optimal relatif  $\Pi_{1 \rightarrow 2}^{\mathcal{L}^2}$  tel que  $E_2 = \Pi_{1 \rightarrow 2} E_1$  avec comme opérateur :

$$\Pi_{1 \rightarrow 2}^{\mathcal{L}^2} = \left[ \int_{\mathcal{T}^2} N_2(x)^T N_2(x) dV \right]^{-1} \left[ \int_{\mathcal{T}^{12}} N_2(x)^T N_1(x) dV \right] \quad (\text{A.3})$$

Ce système est bien posé dans le cadre d'une formulation éléments finis puisque l'opérateur qui intervient est semblable à la matrice de masse. De la même manière, il est possible de définir des opérateurs de transferts de type  $\mathcal{H}^1$  et  $\mathcal{H}^1_{pur}$  (terme  $\mathcal{H}^1$  sans la partie  $\mathcal{L}^2$ ) :

$$\begin{aligned} \Pi_{1 \rightarrow 2}^{\mathcal{H}^1} &= \left[ \int_{\mathcal{T}^2} N_2(x)^T N_2(x) + l^2 B_2(x)^T B_2(x) dV \right]^{-1} \\ &\quad \left[ \int_{\mathcal{T}^{12}} N_2(x)^T N_1(x) + l^2 B_2(x)^T B_1(x) dV \right] \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

$$\Pi_{1 \rightarrow 2}^{\mathcal{H}^1_{pur}} = \left[ \int_{\mathcal{T}^2} B_2(x)^T B_2(x) dV \right]^{-1} \left[ \int_{\mathcal{T}^{12}} B_2(x)^T B_1(x) dV \right] \quad (\text{A.5})$$

## Algorithme de création d'une règle d'intégration entre deux maillages

Afin d'évaluer des termes faisant intervenir des champs définis sur différents espaces (un domaine  $\Omega_1$  et un domaine  $\Omega_2$ ), il est nécessaire de générer un maillage ou une règle d'intégration spécifique. Posons l'expression d'un champ  $E_i(x)$ , appartenant au domaine  $\Omega_i$ , telle que :

$$\vec{e}_i(x) = N_i(x) E_i \quad (\text{B.1})$$

Avec  $N_i(x)$ , les fonctions de forme du maillage  $\mathcal{T}^i$  et  $E_i$ , le vecteur des inconnues nodales. Fixons l'écriture d'un terme, faisant intervenir des champs définis sur différents maillages, telle que :

$$\int_{\Omega} E_1^T N_1^T(x) \cdot N_2(x) E_2 dv = \sum_{D^e \in \mathcal{T}} \int_{D^e} E_1^T N_1^T(x) \cdot N_2(x) E_2 dv \quad (\text{B.2})$$

En pratique, ce terme (B.2) est évalué par un assemblage de calculs effectués sur des domaines sous-découpés, issus de l'intersection entre les maillages des espaces relatifs. Définissons le maillage  $\mathcal{T}^1$ , relatif au domaine  $\Omega_1$ , constitué d'éléments  $D_1^e$  et le maillage  $\mathcal{T}^2$ , relatif au domaine  $\Omega_2$ , constitué d'éléments  $D_2^e$ . Ainsi, pour évaluer l'intégrale sur un élément  $D_1^e$  utilisant des fonctions de formes issues des éléments d'un autre maillage  $\mathcal{T}^2$ , il faut morceler l'élément  $D_1^e$ . En effet, le champ  $\vec{e}_2$  n'est pas, en général, régulier sur l'élément  $D_1^e$ . Il n'existe pas d'approximation polynomiale du champ issu du maillage  $\mathcal{T}^2$ . La solution pour évaluer correctement le terme (B.2) consiste à découper l'élément  $D_1^e$  en fonction du maillage  $\mathcal{T}^2$  pour obtenir les sous-éléments  $D_p^e$  formant un nouveau maillage  $\mathcal{T}^p$  (cf figure B.1).

$$\sum_{D_p^e \in \mathcal{T}^p} \int_{D_p^e} E_1^T N_1^T(x) N_2(x) E_2 dv \quad (\text{B.3})$$

Les produits des fonctions de base  $N_1(x)$  et  $N_2(x)$  deviennent réguliers sur les éléments  $D_p^e$ . Les sous-éléments  $D_p^e$  pouvant être complexes et ne pas avoir de règle d'intégration

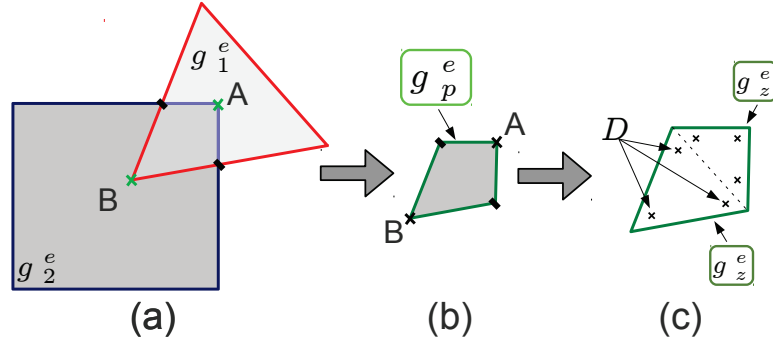


Figure B.1 — Définition des sous-éléments  $D_z^e$  d'intersection entre des éléments  $D_1^e$  et  $D_2^e$  en 2D.

propre, on les redécoupe en éléments triangles ou tétraèdres  $D_z^e$  dont on connaît facilement une règle d'intégration (cf figure B.1).

$$\sum_{D_z^e \in \mathcal{T}^z} \int_{D_z^e} E_1^T N_1^T(x) N_2(x) E_2 dv \quad (\text{B.4})$$

La règle complète revient à définir l'ensemble des coordonnées et les poids  $(g, \rho_g)$  des points d'intégration des sous-éléments  $D_z^e$  qui permettent d'intégrer les fonctions de base des autres triangulations .

$$\sum_{D_z^e \in \mathcal{T}^z} \sum_{g \in D_z^e} \rho_g E_1^T N_1^T(g) N_2(g) E_2 dv \quad (\text{B.5})$$

L'ensemble de cette procédure, qui génère les données des points d'intégration, est réalisé à l'aide d'un algorithme (B.1) qui définit la règle d'intégration associée aux éléments  $D_1^e$ . Cet algorithme permet de créer la règle d'intersection pour des maillages basés sur des éléments convexes.

En terme de performance, on vérifie que l'on intègre avec une très bonne précision puisque l'erreur relative mesurée est de l'ordre de  $10^{-10}$ , montrant ainsi que les problèmes d'arrondis numériques, qui se produisent massivement lors de ce type d'opérations, n'ont pratiquement aucune influence sur la qualité de la règle d'intégration fournie. En ce qui concerne le temps CPU, ce type d'opérations, quand même coûteuses, suit une évolution quasi-linéaire en  $n \cdot (\log(n))$  voir même  $n$ . Le temps passé dans l'algorithme étant concentré sur le calcul des intersections arêtes/éléments qui reste lié linéairement au nombre d'éléments et à leur connectivité moyenne. Le temps requis n'étant pas actuellement excessivement limitant par rapport au temps consacré au calcul, il n'a pas été jugé nécessaire de multi-threader cet algorithme, même si sa parallélisation est directe. L'évolution des temps requis en deux dimensions est fonction de la taille des maillages (B.2) comme pour le cas tridimensionnel (B.3).

---

**Algorithme B.1** Algorithme de création de la règle d'intégration pour les maillages.

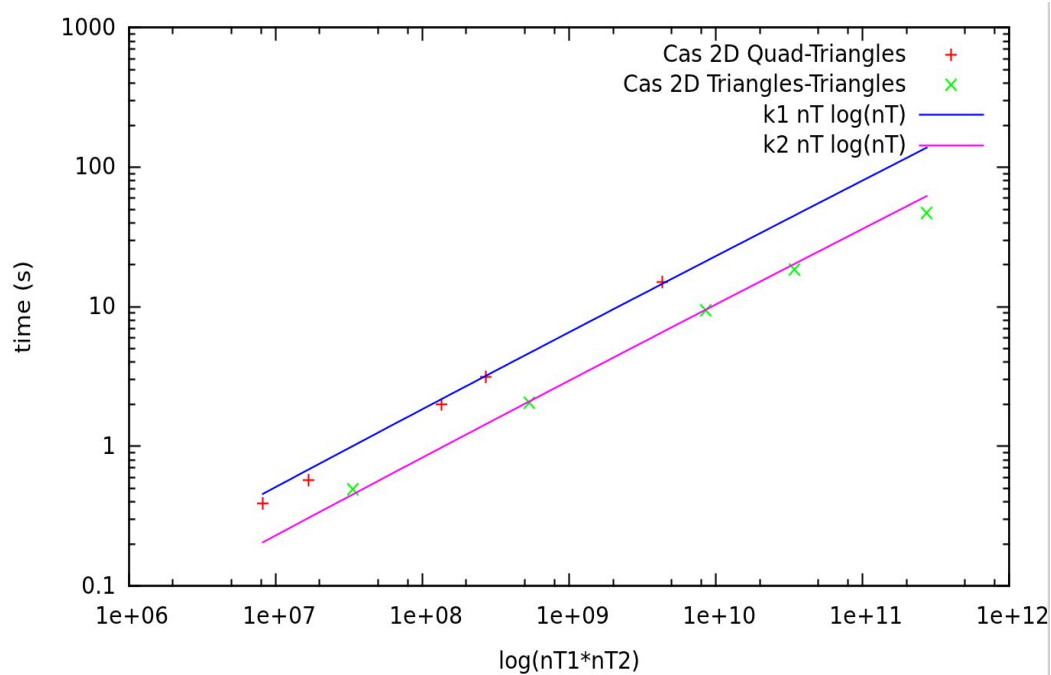
---

```

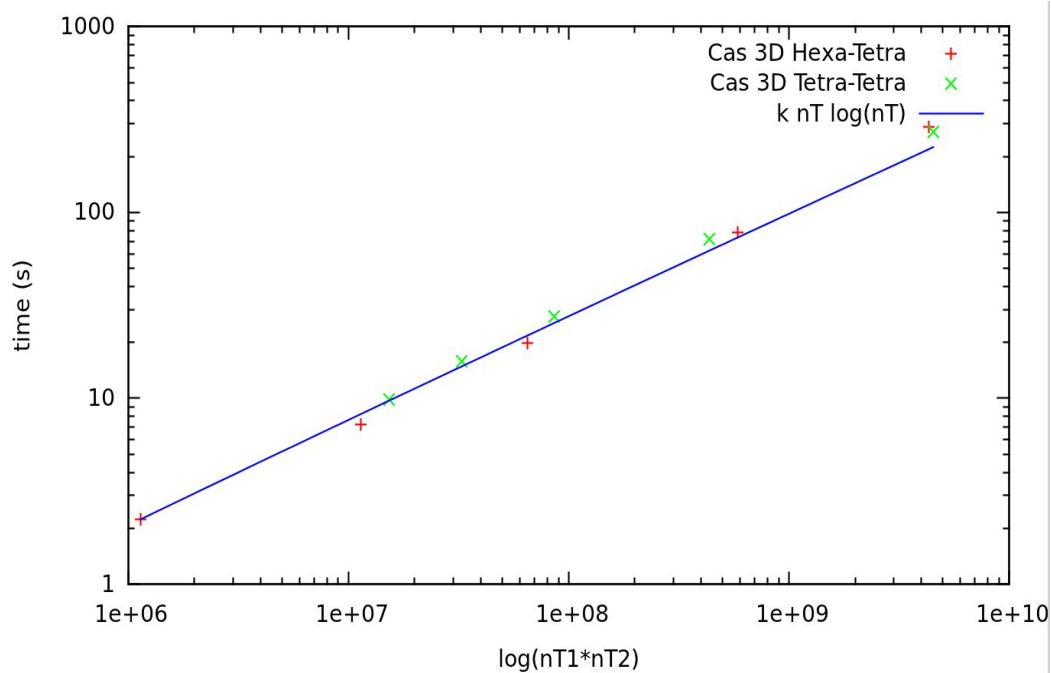
1: bb_tree_maillage_2 → BB_tree
2: {} → integration
3: pour  $i = \{0 \dots \text{nb\_elem}(\text{maillage\_1})\}$  faire
4:   maillage_1.element[i] → elem_1
5:   BB_tree.find_in_box(englobe(elem_1)) → list_elem
6:   {} → integration_i
7:   pour  $j = \{0 \dots \text{nb\_elem}(\text{list\_elem})\}$  faire
8:     list_elem[j] → elem_2
9:     {} → list_inter
10:    elem_1.edges → list_edge
11:    pour  $k = \{0 \dots \text{nb\_edge}(\text{list\_edge})\}$  faire
12:      list_edge[k] → edge
13:      intersection_edge_elem(edge, elem_2, list_inter)1
14:    fin pour
15:    elem_2.edges → list_edge
16:    pour  $k = \{0 \dots \text{nb\_edge}(\text{list\_edge})\}$  faire
17:      list_edge[k] → edge
18:      intersection_edge_elem(edge, elem_1, list_inter)1
19:    fin pour
20:    clean_duplicates(list_inter, tolerance)
21:    QHULL.build_hull(list_inter) → hull_faces
22:    si hull_faces.no_degenerate alors
23:      hull_faces.center → center_node
24:      pour  $k = \{0 \dots \text{nb\_face}(\text{hull\_faces})\}$  faire
25:        build_simplex({center_node, hull_faces[k].nodes}) → simplex
26:        pour  $h = \{0 \dots \text{simplex.nb\_GP}\}$  faire
27:          simplex.GP_real_weight(k) → w_GP
28:          elem_1.find_ref_pos(simplex.GP_real_pos(k)) → xi_1
29:          elem_2.find_ref_pos(simplex.GP_real_pos(k)) → xi_2
30:          intersection_i.add({elem_2.id, w_GP, xi_1, xi_2})
31:        fin pour
32:      fin pour
33:    fin si
34:    intersection.add({elem_1.id, intersection_i})
35:  fin pour
36: fin pour

```

---



**Figure B.2** — Évolution des temps CPU pour un calcul des intersections 2D.



**Figure B.3** — Évolution des temps CPU pour un calcul des intersections 3D.